Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 10/11

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 26.10.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z-\mathrm{e}^{x+2y}+\mathrm{e}^{x+y+z} \\ x+y+z+\frac{1}{2}\sin(x+y+z) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass das Gleichungssystem $F(x,y,z)=0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ nach x und y aufgelöst werden kann.

(b) Bestimme das maximale Intervall für z, auf dem die Auflösung in (a) möglich ist.

(c) Bestimme den Tangentialvektor der Lösungskurve aus (a) an der Stelle $z=0$.

Aufgabe 2. Sei $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $G(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z = 0$.

(a) Zeige, dass das Gleichungssystem $G(x,y,z)=0$ in einer Umgebung des Ursprungs $(0,0,0)\in\mathbb{R}^3$ nach z aufgelöst werden kann.

(b) Bestimme für die Auflösung $z(x,y)$ aus (a) das Tailorpolynom zweiten Grades an der Stelle $(x,y)=(0,0)$.

Aufgabe 3. Seien $n\in\mathbb{N}$, $A,B\in M(n\times n,\mathbb{R})$, $E_n\in M(n\times n,\mathbb{R})$ die Einheitsmatrix und $\mathrm{Spur}(B)=\sum_{k=1}^n b_{kk}$ die Spur von $B=(b_{ij})_{i,j}$. Zeige:

(a) Die Abbildung $L_A\colon M(n\times n,\mathbb{R})\to M(n\times n,\mathbb{R})$, $X\mapsto AX$, ist differenzierbar und $(DL_A)(X)Y = AY$.

(b) $(D\det)(E_n)B = \mathrm{Spur}(B)$.

(c) $(D\det)(A)AB = \det(A)\mathrm{Spur}(B)$. (*Hinweis:* Benutze die Gleichung $(\det\circ L_A)(X) = \det(AX) = \det(A)\det(X)$, die Kettenregel sowie (a,b).)

Aufgabe 4. Sei $A\in M(n\times n,\mathbb{R})$. Zeige:

(a) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto\det(\exp(tA))$, erfüllt die Gleichung $f'(t)=f(t)\mathrm{Spur}(A)$ für alle $t\in\mathbb{R}$.

(b) Die Funktion $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto f(t)\exp(-\mathrm{Spur}(A)t)$, ist konstant.

(c) Es gilt $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Spur}(A))$.