Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 10/11**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 02.11.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 3

Die Aufgaben 1, 2 und 3 zeigen, dass die $O(n), SU(n), U(n)$ Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{R}^{2n^2}$ sind. Gruppen, die gleichzeitig Mannigfaltigkeiten sind, heißen *Lie-Gruppen*; die zugehörigen Tangentialräume am Einselement der Gruppe tragen die Zusatzstruktur einer *Lie-Algebra*, und beide Strukturen spielen in der Physik eine fundamentale Rolle.

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n\times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ wie zuvor und bezeichnen mit E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix. Sei $f\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch $A \mapsto A^T A - E_n$. Zeige:

(a) $(Df)(A)B = A^T B + B^T A$ und $(Df)(A)(BA) = A^T(B + B^T)A$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(b) $\operatorname{rang}((Df)(A)) = n(n+1)/2$ für alle $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

(c) $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ mit Dimension $n(n-1)/2$ und Kodimension $n(n+1)/2$.

(d) $\mathfrak{o}(n) := T_{E_n}(O(n))$ ist gegeben durch $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X^T = -X\}$.

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren wieder $M(n \times n, \mathbb{C})$ mit $\mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$. Die Argumentation aus Aufgabe 1 lässt sich auf die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$ übertragen, indem man die Funktion f modifiziert.

(a) Gib die passende Abwandlung von f und deren Ableitung für $U(n)$ und $SU(n)$ an.

(b) Bestimme $\mathfrak{u}(n) := T_{E_n}(U(n))$ und $\mathfrak{su}(n) := T_{E_n}(SU(n))$.

Aufgabe 3. Wir verwenden die Bezeichnungen von Aufgabe 1 und Aufgabe 2. Zeige:

(a) $\exp(\mathfrak{u}(n)) = U(n)$ und $\exp(\mathfrak{su}(n)) = SU(n)$. (*Hinweis:* Verwende den Logarithmus und die Diagonalisierbarkeit unitärer Matrizen.)

(b) Es gibt eine Umgebung W von E_n in $M(n \times n, \mathbb{C})$ so, dass $(D\exp)(A)$ invertierbar ist für alle $A \in W$. (*Hinweis:* Nutze die Invertierbarkeit von $(D\exp)(E_n)$.)

(c) Die Einschränkungen von exp auf $W \cap T_{E_n}(U(n))$ und $W \cap T_{E_n}(SU(n))$ sind Immersionen.

Aufgabe 4. Sei $a, b, c > 0$ und $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1\}$.

(a) Zeige mit Hilfe der Definition 3.1 der Vorlesung, dass E eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Bestimme $T_p(E)$ und $N_p(E)$ für jeden Punkt $p \in E$.