Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 10/11

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 09.11.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $0 < r < R$ und $T \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man von $(r+R, 0, 0)$ aus durch Nacheinanderausführung

- einer Drehung um die Achse $x = R, z = 0$ um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ und
- einer Drehung um die z-Achse um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$

erreichen kann.

(a) Zeige mit Hilfe der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$, dass $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beschreibe $(x, y, z) \in T$ als Funktionen von ϕ und θ.

(c) Bestimme eine möglichst einfache Basis für den Tangentialraum an T an dem durch $\phi = \theta = \pi/4$ bestimmten Punkt. (*Hinweis:* Verwende (b), nicht (a).)

Aufgabe 2. Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Bestimme Koordinaten und Wert des Maximums und Minimums der Funktion $F\colon S^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x^4 + y^4 + z^4$.

Aufgabe 3. Bestimme Koordinaten und Wert des Maximums und Minimums der Funktion $F(x, y, z) = x + y + z$ auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4,\ x + y = 2\}$.

Aufgabe 4. Sei $p \in (1, \infty)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ mit $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$. Betrachte die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k$, und die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n |x_k|^p = 1\}$. Zeige:

(a) $\max_{x \in M} F(x) = (\sum_{k=1}^n |a_k|^q)^{1/q}$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt die *Hölder-Ungleichung*

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}.$$