Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 10/11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 16.11.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. (a) Sei $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ zweimal differenzierbar und nach Bogenlänge parametrisiert. Zeige: Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\langle c''(t), c'(t)\rangle = 0$.

(b) Die Kurve $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ beschreibe die Bewegung eines Teilchens mit konstanter Geschwindigkeit v entlang eines Kreises vom Radius r um $0 \in \mathbb{R}^2$. Man zeige, dass für die Beschleunigung c'' gilt: $c''(t) = -\frac{v^2}{r^2}c(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

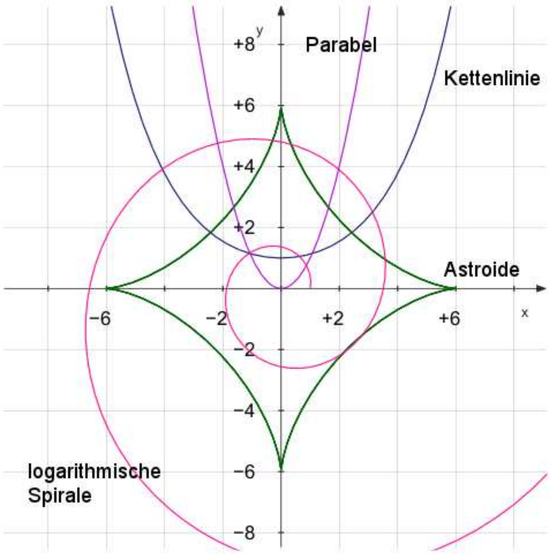
Aufgabe 2. Bestimme die Bogenlänge s

(a) der Kettenlinie $y(x) = a\cosh\frac{x}{a}$ für $0 \leq x \leq x_0$, wobei $a > 0$;

(b) der Astroide $c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (6\cos^3 t, 6\sin^3 t)$;

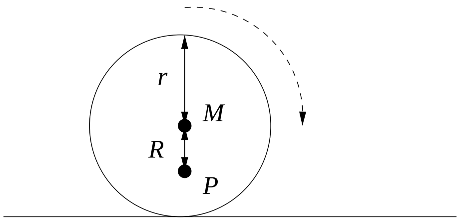
(c) der logarithmischen Spirale, gegeben in Polarkoordinaten durch $r(\phi) = ae^{m\phi}$ für $0 \leq \phi \leq \phi_0$, wobei $a, m > 0$;

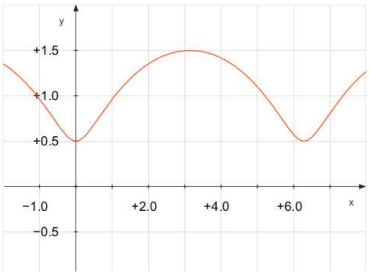
(d) des Parabelabschnitts $y(x) = \frac{x^2}{2}$ für $0 \leq x \leq x_0$.



(Die Kurven aus Aufgabe 2 mit teilweise geänderten Parametern)

Aufgabe 3. Ein Rad mit Radius r rolle auf der x-Achse in der xy-Ebene, hierbei bewege sich der Mittelpunkt des Rades mit der konstanten Geschwindigkeit v. Ferner sei P ein fest mit dem Rad verbundener Punkt im Abstand R von M, wobei $0 \leq R \leq r$. Die Punkte P und M befinden sich zur Zeit $t = 0$ auf der y-Achse und P liege unterhalb von M.





(a) Gib eine Parametrisierung der Bahn c von P mit der Zeit t als Parameter an.

(b) Bestimme $\max_t \|c'(t)\|$ und $\min_t \|c'(t)\|$.

(c) Welche Länge besitzt c für $r = R$ nach einer Radumdrehung? (*Hinweis:* Nutze die Gleichung $\cos\phi = 1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}$.)

Aufgabe 4. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$ und sei $c \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta])$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen für die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}\colon [\alpha,\beta] \times \mathcal{C}^2([\alpha,\beta]) \times \mathcal{C}^1([\alpha,\beta]) \to \mathbb{R}, \quad (t,q,v) \mapsto q\sqrt{1+v^2},$$

für alle $t \in [\alpha,\beta]$. Zeige:

(a) Es gibt ein $\gamma \in \mathbb{R}$ so, dass für alle $t \in (\alpha,\beta)$ gilt:

$$\frac{c(t)c'(t)^2}{\sqrt{1+c'(t)^2}} - c(t)\sqrt{1+c'(t)^2} = -\gamma.$$

(*Hinweis:* Energieerhaltungssatz.)

(b) $c(t) = \gamma\sqrt{1+c'(t)^2}$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$.

(Das zugehörige Variationsproblem besteht darin, für eine Kurve zwischen vorgegebene Randpunkten den Oberflächeninhalt der zugehörige Rotationsfläche (bei Drehung um die x-Achse) zu minimieren.)