**Prof. Dr. R. Wulkenhaar** **WS 10/11**
**Dr. T. Timmermann**

# Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 30.11.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 7

---

**Aufgabe 1.** Löse die folgenden Anfangswertprobleme (AWPe):

(a) $(t^2+t-2)x'(t) = 3x(t)$ mit $x(0)=1$ für $-2<t<1$.

(b) $(t^2+1)x'(t)+2tx(t) = 1$ mit $x(0)=1$.

**Aufgabe 2.** Sei

$$A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b(t) := \begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme ein Lösungs-Fundamentalsystem der linearen DGL $x'(t) = A(t)x(t)$.

(b) Löse das Anfangswertproblem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*In den Aufgaben 3 und 4 betrachten wir für ein AWP $x'(t) = v(t, x(t))$, $x(t_0) = x^{(0)}$, die Lösungs-Approximationen $x^{(k)}(t)$ nach Picard-Lindelöf, definiert durch*

$$x^{(k+1)}(t) = x^{(0)} + \int_{t_0}^{t} ds\, v(s, x^{(k)}(s)).$$

**Aufgabe 3.** Zeige, dass im Fall eines homogenen linearen AWPs $x'(t) = A(t)x(t)$, $x(t_0) = x^{(0)}$ gilt:

(a) $x^{(2)}(t) = \Big(E + \int_{t_0}^t ds_1 A(s_1) + \int_{t_0}^t ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_1)A(s_2)\Big)\, x^{(0)}$;
dabei bezeichne $E$ die Einheitsmatrix.

(b) $x^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{k} B_l(t,t_0)x^{(0)}$, wobei $B_0(t,t_0) = E$ und

$$\begin{aligned} B_l(t,t_0) &= \int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) B_{l-1}(s_1, t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} ds_1 \int_{t_0}^{s_1} ds_2 \cdots \int_{t_0}^{s_{l-1}} ds_l A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_l) \quad \text{für } l \geq 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4.** (a) Bestimme $x^{(1)}(t)$ und $x^{(2)}(t)$ für das folgende AWP:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t)x_3(t), & x_1(0) &= 0, \\ x_2'(t) &= -x_1(t)x_3(t), & x_2(0) &= 1, \\ x_3'(t) &= 2, & x_3(0) &= 2. \end{aligned}$$

(b) Wir betrachten das AWP

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t), \qquad\qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige: Die in Aufgabe 3 (b) definierten Matrizen $B_l(t,0)$ sind gegeben durch

$$B_l(t,0) = \begin{pmatrix} \frac{t^l}{l!} & \frac{t^l}{l!} - \frac{t^{l+1}}{(l+1)!} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimme die Approximationen $x^{(k)}(t)$ für das AWP aus (b) und zeige $\lim_{k\to\infty} x^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t + t \\ 1 \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.