Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 10/11**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 14.12.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Bestimme für die nachfolgenden 1-Formen, ob sie geschlossen sind, und bestimme nach Möglichkeit ein Potential auf dem vorgegebenen Definitionsbereich[1] (Erraten ist erlaubt):

(a) $\omega = (xy\cos(xy) + \sin(xy))dx + x^2\cos(xy)dy$ auf $\mathbb{R}^2$.

(b) $\omega = y\sin z\,dx + x\sin z\,dy + xy\cos z\,dz$ auf $\mathbb{R}^3$.

(c) $\omega = \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(y + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die 1-Form

$$\omega(x,y,z) = \ln(1+x^2+y^2+z^2)(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

(a) Ist ω geschlossen?

(b) Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ und $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $t \mapsto (tx,ty,tz)$. Berechne $\int_c \omega$.

(c) Bestimme ein Potential von ω.

Aufgabe 3. Berechne das Kurvenintegral $\int_c \omega$ und nutze dabei nach Möglichkeit Wegunabhängigkeit aus (Potentiale erraten sei wieder erlaubt):

(a) $\omega = (2xy^3 - y^2\cos x)dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)dy$ und $c\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \left(\frac{\pi}{2}t^2, t\right)$.

(b) $\omega = (\mathrm{e}^x\sin y - 2y\sin x)dx + (\mathrm{e}^x\cos y + 2\cos x)dy$ und $c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (2\cos t, 3\sin t)$.

Aufgabe 4. Prüfe die folgenden Differentialgleichungen auf Exaktheit, bestimme bei Bedarf einen integrierenden Faktor μ der Form $\mu = \mu(x)$ und löse die Differentialgleichung:

(a) $(2x+3) + (2y(x) - 2)y'(x) = 0$.

(b) $(x^2 + y(x)) - x\,y'(x) = 0$ für $x > 0$.

---

[1] Im Gegensatz zur Vorlesung identifizieren wir Koordinaten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit ihren Koordinatenfunktionen