Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 10/11**
Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 21.12.2010, vor der Vorlesung in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Seien $u, v\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f = u + iv\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und

$$\partial_z f := \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f), \qquad \partial_{\bar{z}} f := \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f).$$

Ferner sei $\bar{f}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$. Zeige:

(a) f ist genau dann in $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$, und in dem Fall gilt $f'(z) = \partial_z f(z)$.

(b) $\overline{\partial_z f} = \partial_{\bar{z}} \bar{f}$ und $\overline{\partial_{\bar{z}} f} = \partial_z \bar{f}$. Sind f und $\bar{f}$ holomorph, so ist f konstant.

(c) Ist $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, so gilt $\partial_z(fg) = (\partial_z f)g + f(\partial_z g)$. Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1$ gilt $\partial_z(z^k \bar{z}^l) = kz^{k-1}\bar{z}^l$ und $\partial_{\bar{z}}(z^l \bar{z}^k) = kz^l \bar{z}^{k-1}$.

Aufgabe 2. (a) Finde eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x+iy \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$, mit $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$. (Erraten erlaubt.)

(b) Bestimme alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f\colon z \mapsto |z|^4 - 2|z|^2$ komplex differenzierbar ist. (*Hinweis:* Verwende Aufgabe 1.) In welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ ist f holomorph?

Aufgabe 3. Berechne folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_\pm} d\zeta \frac{\mathrm{e}^\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+1)}$, wobei $\gamma_\pm\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t} \pm 1$.

(b) $\displaystyle\int_{\gamma} d\zeta \frac{\cos(\zeta)^2 - \sin(\zeta)^2}{(\zeta-2i)^2(\zeta+3i)}$, wobei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto 2\mathrm{e}^{2\pi i t} + 2i$.

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige:

(a) Ist $U = \mathbb{C}$ und $|f(z)| \leq A|z| + B$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und gewisse $A, B > 0$, so gilt $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und gewisse $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) (*Maximumprinzip*) Die Funktion $|f|$ besitzt keine lokalen Maxima in U. Ist $|f|$ stetig auf den Abschluss $\overline{U}$ fortsetzbar, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand $\partial U = \overline{U} \setminus U$ an, also $\sup_{z\in\overline{U}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial U} |f(z)|$. (*Hinweis:* Verwende die Cauchysche Integralformel.)