Das Prädual

Gábor Szabó

Ein σ-schwach stetiges Funktional auf einer von Neumann Algebra M ist automatisch normstetig und definiert demnach ein Element in M^*. Das Ziel dieses Vortrages ist es zu zeigen, dass die σ-schwach stetigen Funktionale einen Unterraum M_* von M^* aufspannen, sodass M eingebettet in M^{**} gerade dem Dual von M_* entspricht. Dies tun wir zunächst im Spezialfall $M = \mathcal{L}(H)$.

Auf dem Weg dorthin stellen wir natürliche nicht-kommutative Analoga von Folgenräumen vor. Wir geben uns zur Illustration eine von H abhängige Indexmenge I vor. Es gelten dann folgende Beziehungen.

$$\begin{array}{ccccccccc} c_{fin}(I) & \subset & \ell^1(I) & \subset & \ell^2(I) & \subset & c_0(I) & \subset & \ell^\infty(I) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{L}_{fin}(H) & \subset & \mathcal{L}_1(H) & \subset & \mathcal{L}_2(H) & \subset & \mathcal{K}(H) & \subset & \mathcal{L}(H) \end{array}$$

Dabei sind $\mathcal{L}_1$ die sogenannten Spurklasse Operatoren und $\mathcal{L}_2$ die sogenannten Hilbert-Schmidt Operatoren. Die Dualitätsbeziehung wird dann, ganz analog zum kommutativen Fall, zwischen $\mathcal{L}_1(H)$ und $\mathcal{L}(H)$ gelten.

Definition & Proposition 1. Sei $a \in \mathcal{L}(H)$ positiv und $(\xi_i)_i, (\eta_i)_i$ seien zwei Orthonormalbasen von H. Dann gilt stets

$$\sum_i \langle a\xi_i | \xi_i \rangle = \sum_i \langle a\eta_i | \eta_i \rangle.$$

Dabei ist auch der Wert ∞ zugelassen. Wir definieren dann $\operatorname{tr}(a) = \sum_i \langle a\xi_i | \xi_i \rangle$ die *Spur* von a.

Ein beliebiges $a \in \mathcal{L}(H)$ ist *von Spurklasse*, falls $\operatorname{tr}|a| < \infty$. Die Menge all solcher a in $\mathcal{L}(H)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_1(H)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \langle a\xi_i | \xi_i \rangle &= \sum_i \langle \sqrt{a}\xi_i | \sqrt{a}\xi_i \rangle &&= \sum_i \|\sqrt{a}\xi_i\|^2 \\ &= \sum_i \sum_j |\langle \sqrt{a}\xi_i | \eta_j \rangle|^2 &&= \sum_{i,j} |\langle \sqrt{a}\eta_j | \xi_i \rangle|^2 \\ &= \sum_j \|\sqrt{a}\eta_j\|^2 &&= \sum_j \langle a\eta_j | \eta_j \rangle. \end{aligned}$$

Da in obigen Ausdrücken ausschließlich über positive Zahlen summiert wird, gilt die Gleichheit auch im Falle der Divergenz. □

Definition 2. Seien H, K zwei Hilberträume und $x \in \mathcal{L}(H, K)$ ein beschränkter Operator. x heißt Hilbert-Schmidt Operator, falls x^*x von Spurklasse ist, das heißt

$$\sum_i \|x\xi_i\|^2 = \sum_i \langle x^*x\xi_i | \xi_i \rangle = \operatorname{tr}(x^*x) < \infty$$

für jede (oder nur eine) Orthonormalbasis $(\xi_i)_i$ von H. Wir schreiben $\mathcal{L}_2(H,K)$ für die Menge aller Hilbert-Schmidt Operatoren in $\mathcal{L}(H,K)$. Wir definieren

$$|x|_2^2 := \sum_i \|x\xi_i\|^2$$

und dieser Ausdruck ist unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. $|x|_2$ ist die *Hilbert-Schmidt Norm* von x.

Proposition 3. *a) Es ist $\|x\| \leq |x|_2$ für alle $x \in \mathcal{L}(H,K)$.*

b) Ist $x \in \mathcal{L}_2(H,K)$, so ist $x^* \in \mathcal{L}_2(K,H)$. Außerdem besteht $\mathcal{L}_2(H,K)$ aus kompakten Operatoren. Die Operatoren mit endlichem Rang sind sogar in $|\cdot|_2$-Norm dicht.

Beweis. zu a). Sei $\varepsilon > 0$ klein. Wähle $\xi \in H$ mit $\|\xi\| = 1$, sodass $\|x\xi\|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon$. Ergänze ξ mithilfe einer Menge $\{\,\xi_i\,\}_i$ zu einer Orthonormalbasis auf ganz H. Dann folgt

$$|x|_2^2 = \|x\xi\|^2 + \sum_i \|x\xi_i\|^2 \geq \|x\xi\|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon.$$

Es folgt die Behauptung.

zu b). Wähle zwei Orthonormalbasen $(\xi_i)_i$ von H und $(\eta_j)_j$ von K. Es gilt folgende Identität.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(x^*x) &= \textstyle\sum_i \|x\xi_i\|^2 &&= \textstyle\sum_{i,j} |\langle x\xi_i|\eta_j\rangle|^2 \\ &= \textstyle\sum_{i,j} |\langle x^*\eta_j|\xi_i\rangle|^2 &&= \mathrm{tr}(xx^*) \end{aligned}$$

Folglich $x \in \mathcal{L}_2(H,K)$ genau dann, wenn $x^* \in \mathcal{L}_2(K,H)$.

Um zu zeigen, dass $\mathcal{L}_2(H,K) \subset \mathcal{K}(H,K)$ ist, zeigen wir, dass Operatoren endlichen Ranges in $\mathcal{L}_2(H,K)$ dicht liegen. Zur korrekten formalen Behandlung geben wir uns nun zwei feste Indexmengen I, J vor, sodass jede Orthonormalbasis von H bzw. K über I bzw. J indiziert werden kann.
Definiere $\mathcal{F} = \{\, F \subset I \times J : F \text{ ist endlich} \,\}$. Dies ist eine gerichtete Menge und die obige Summierbarkeit der Reihe $\sum_{i\in I, j\in J} |\langle x\xi_i|\eta_j\rangle|^2$ ist äquivalent zur Konvergenz des Netzes $a_F = \sum_{(i,j)\in F} |\langle x\xi_i|\eta_j\rangle|^2$. Definiere nun 1-Rang Operatoren für $i \in I, j \in J$ durch

$$P_{ij}(v) = \langle x\xi_i|\eta_j\rangle\langle v|\xi_i\rangle\eta_j.$$

Außerdem definieren wir $P_F = \sum_{(i,j)\in F} P_{ij}$ für $F \in \mathcal{F}$. Man kann nun leicht nachrechnen, dass für endliche $F \in \mathcal{F}$ gilt

$$|x - P_F|_2^2 = \sum_{(i,j)\in I\times J\setminus F} |\langle x\xi_i|\eta_j\rangle|^2.$$

Nun wähle für ein $\varepsilon > 0$ ein $F \in \mathcal{F}$, sodass schon

$$\sum_{(i,j)\in I\times J\setminus F} |\langle x\xi_i|\eta_j\rangle|^2 < \varepsilon$$

gilt. Dann folgt damit auch

$$\|x - P_F\|^2 \leq |x - P_F|_2^2 = \sum_{(i,j)\in I\times J\setminus F} |\langle x\xi_i|\eta_j\rangle|^2 < \varepsilon.$$

Damit sind wir fertig. $\square$

Satz 4. *a) Falls $x \in \mathcal{L}_2(H,K)$ und $a \in \mathcal{L}(H), b \in \mathcal{L}(K)$ beliebig sind, so ist $bxa \in \mathcal{L}_2(H,K)$. Genauer gilt dann*

$$|bxa|_2 \leq \|a\|\|b\| \cdot |x|_2.$$

b) Sind $x \in \mathcal{L}_2(H,K), y \in \mathcal{L}_2(K,H)$, so existiert $\operatorname{tr}(yx) = \sum_i \langle x\xi_i | y^*\xi_i\rangle$ für jede Orthonormalbasis und ist unabhängig von der Wahl dieser. Mit

$$\langle x|y\rangle := \operatorname{tr}(y^*x)$$

wird $\mathcal{L}_2(H,K)$ sogar zu einem Hilbertraum.

Beweis. zu a). Es ist

$$\begin{aligned}
|bxa|_2^2 &= \sum_i \|bxa\xi_i\|^2 \leq \|b\|^2 \sum_i \|xa\xi_i\|^2 \overset{3b)}{=} \|b\|^2 \sum_j \|a^*x^*\eta_j\|^2 \\
&\leq \|b\|^2\|a\|^2 \sum_j \|x^*\eta_j\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \sum_i \|x\xi_i\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2|x|_2^2
\end{aligned}$$

mit einer beliebigen Wahl der Orthonormalbasen $(\xi_i)_i, (\eta_j)_j$.

zu b). Es ist für $x, y \in \mathcal{L}_2(H,K)$

$$\begin{aligned}
\sum_i |\langle y^*x\xi_i|\xi_i\rangle| &= \sum_i |\langle x\xi_i|y\xi_i\rangle| \leq \sum_i \|x\xi_i\|\|y\xi_i\| \\
&\leq \left(\sum_i \|x\xi_i\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_j \|y\xi_j\|^2\right)^{1/2} = |x|_2|y|_2 < \infty.
\end{aligned}$$

Da also stets absolute Konvergenz vorliegt, ist die Unabhängigkeit der Basiswahl genau wie in Proposition 1 zu zeigen. Daher ist die Wohldefiniertheit des obigen Skalarproduktes gegeben. Dass es positiv definit ist, ist klar, ebenso die Sesquilinearität. Die hermit'sche Eigenschaft folgt aus

$$\langle y|x\rangle = \operatorname{tr}(x^*y) = \sum_i \langle x^*y\xi_i|\xi_i\rangle = \sum_i \overline{\langle y^*x\xi_i|\xi_i\rangle} = \overline{\operatorname{tr}(y^*x)} = \overline{\langle x|y\rangle}.$$

Es bleibt noch die Vollständigkeit zu zeigen. Sei daher $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}_2(H,K)$. Da sie damit insbesondere eine Cauchy-Folge in der Operatornorm ist, hat sie einen Normgrenzwert x. Für ein $\varepsilon > 0$ und große $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$|x_n - x_m|_2^2 = \sum_i \|(x_n - x_m)\xi_i\|^2 < \varepsilon.$$

Für endliche Teilmengen $F \subset I$ folgt damit $\sum_{i\in F} \|(x_n - x_m)\xi_i\|^2 < \varepsilon$. Führe nun den Grenzübergang $n \to \infty$ durch und erhalte

$$\sum_{i\in F} \|(x - x_m)\xi_i\|^2 < \varepsilon \quad \text{für alle endlichen } F \subset I.$$

Damit folgt aber insbesondere schon

$$|x - x_m|_2^2 = \sum_i \|(x - x_m)\xi_i\|^2 < \varepsilon.$$

Insbesondere sieht man $x \in \mathcal{L}_2(H,K)$ und $|x - x_m|_2 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Bemerkung. Aus obigem Satz folgt insbesondere, dass $|\cdot|_2$ eine Norm ist auf $\mathcal{L}_2(H,K)$. Schreibe ab nun verkürzend $\mathcal{L}_2(H) := \mathcal{L}_2(H,H)$.

Lemma 5. *Es gilt $\mathcal{L}_1(H) \subset \mathcal{L}_2(H)$ und für Elemente $a \in \mathcal{L}_2(H)$ gilt auch $a \in \mathcal{L}_1(H)$ genau dann, wenn*

$$\sup\{\, |\langle a|b\rangle| \ : b \in \mathcal{L}_2(H), \|b\| \le 1 \,\} < \infty.$$

In dem Fall ist $\operatorname{tr}|a|$ *genau obiges Supremum.*

Beweis. Zunächst gilt für $a \in \mathcal{L}_1(H)$ die Identität $\operatorname{tr}|a| = \operatorname{tr}((|a|^{\frac{1}{2}})^*|a|^{\frac{1}{2}}) < \infty$ und daher $|a|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}_2(H)$. Damit ist dann aber auch $a = u|a| \in \mathcal{L}_2(H)$ für die Polarzerlegung.

Sei $(\xi_i)_i$ eine Orthonormalbasis von H. Für eine endliche Teilmenge F der Indexmenge sei P_F die orthogonale Projektion auf den Unterraum $\langle \xi_i | i \in F\rangle$. Alle P_F haben endlichen Rang und Norm 1. Damit folgt

$$\langle a|uP_F\rangle = \sum_i \langle u|a|\xi_i|uP_F\xi_i\rangle = \sum_{i\in F}\langle u^*u|a||\xi_i\rangle = \sum_{i\in F}\langle |a|\xi_i|\xi_i\rangle \xrightarrow{F} \operatorname{tr}|a|.$$

Andererseits sei $b \in \mathcal{L}_2(H)$ mit $\|b\| \le 1$. Da a und damit $|a|$ kompakt sind, wähle eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ξ_i zu Eigenwerten $\lambda_i \ge 0$. Dann folgt

$$|\langle a|b\rangle| \le \sum_i |\langle a\xi_i|b\xi_i\rangle| = \sum_i |\langle |a|\xi_i|u^*b\xi_i\rangle| = \sum_i \lambda_i|\langle \xi_i|u^*b\xi_i\rangle| \le \sum_i \lambda_i = \sum_i \langle |a|\xi_i|\xi_i\rangle = \operatorname{tr}|a|.$$

Folglich ist $\operatorname{tr}|a|$ obiges Supremum für $a \in \mathcal{L}_1(H)$.

Sei nun umgekehrt jenes Supremum endlich. Dann sieht man anhand obiger Rechnung, dass $\operatorname{tr}|a| \le \sup\{\dots\}$ ist und insbesondere $\operatorname{tr}|a| < \infty$. ☐

Satz 6. *a) Auf $\mathcal{L}_1(H)$ definiert $|a|_1 = \operatorname{tr}(|a|)$ eine Norm. Unter dieser ist $\mathcal{L}_1(H)$ ein Banachraum und es gilt $\|a\| \le |a|_1$.*

b) $\mathcal{L}_1(H) \subset \mathcal{K}(H) \subset \mathcal{L}(H)$ ist ein zweiseitiges, selbstadjungiertes Ideal.

c) Für $a \in \mathcal{L}_1(H)$ ist die Spur

$$\operatorname{tr}(a) = \sum_i \langle a\xi_i|\xi_i\rangle$$

für jede Orthonormalbasis $(\xi_i)_i$ absolut konvergent und unabhängig von der Wahl dieser. Dies induziert ein Funktional $\operatorname{tr} : \mathcal{L}_1(H) \to \mathbb{C}$, welches $|\cdot|_1$-stetig ist.

Beweis. zu a). Wir prüfen die Normeigenschaften nach.

- Sei $|a|_1 = 0 = \operatorname{tr}|a| = \langle \sqrt{|a|}\ |\sqrt{|a|}\rangle = |\sqrt{|a|}|_2^2$. Dann folgt $\sqrt{|a|} = 0$ und damit $a = 0$.
- $|\lambda a|_1 = |\lambda||a|_1$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist klar.
- Seien $a, b \in \mathcal{L}_1(H)$. Wir nutzen Lemma 5 und erhalten

$$|a+b|_1 = \sup\{|\langle a+b|x\rangle| : \underbrace{x \in \mathcal{L}_2(H), \|x\| \le 1}_{(\star)}\} \le \sup\{\,|\langle a|x\rangle| : (\star)\,\} + \sup\{\,|\langle b|x\rangle| : (\star)\,\} = |a|_1 + |b|_1.$$

Dann sehen wir weiterhin $\|a\| \overset{\text{Prop. 3}}{\le} |a|_2 \overset{\text{Lemma 5}}{\le} |a|_1$.

Zur Vollständigkeit. Sei $(a_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}_1(H)$. Wegen obiger Ungleichung hat diese Folge einen Normgrenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$. Für große n, m ist

$$\operatorname{tr}|a_n - a_m| = \sum_i \langle |a_n - a_m|\xi_i|\xi_i\rangle < \varepsilon.$$

Damit folgt insbesondere für endliche Teilmengen F der Indexmenge

$$\sum_{i \in F} \langle |a_n - a_m| \xi_i | \xi_i \rangle < \varepsilon.$$

Durch Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir

$$\sum_{i \in F} \langle |a - a_m| \xi_i | \xi_i \rangle < \varepsilon \quad \text{für alle } F$$

und damit

$$\sum_{i} \langle |a - a_m| \xi_i | \xi_i \rangle = \operatorname{tr} |a - a_m| < \varepsilon.$$

Damit sieht man $a \in \mathcal{L}_1(H)$ und $a_m \to a$ in $|\cdot|_1$.

zu b). Seien $a, b \in \mathcal{L}_2(H)$ und $a = u|a|$ die Polarzerlegung von a. Sei $(\xi_i)_i$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren von $|a|$ zu Eigenwerten $\lambda_i \geq 0$. Dann ist

$$\langle a|b \rangle = \sum_i \langle a\xi_i | b\xi_i \rangle = \sum_i \langle |a|\xi_i | u^* b \xi_i \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \xi_i | u^* b \xi_i \rangle = \sum_i \langle b^* u \xi_i | \, |a| \xi_i \rangle = \sum_i \langle b^*(u\xi_i) | \, |a| u^*(u\xi_i) \rangle = \langle b^* | a^* \rangle.$$

Mit Lemma 5 folgt dann $\operatorname{tr}|a| = \operatorname{tr}|a^*|$ und somit $\mathcal{L}_1(H)^* = \mathcal{L}_1(H)$. Es genügt also ab nun zu zeigen, dass $\mathcal{L}_1(H)$ ein Linksideal ist. Sei also $x \in \mathcal{L}(H)$ und $a \in \mathcal{L}_1(H)$. Dann ist

$$\operatorname{tr}|xa| = \sum_i \langle \sqrt{a^* x^* x a} \xi_i | \xi_i \rangle \leq \sum_i \|x\| \langle |a| \xi_i | \xi_i \rangle = \|x\| \operatorname{tr}|a|.$$

Analog folgt für ein weiteres $y \in \mathcal{L}(H)$ sogar

$$|xay|_1 \leq \|x\| \|y\| \cdot |a|_1.$$

zu c). Wir zeigen zunächst die absolute Konvergenz. Sei $a \in \mathcal{L}_1(H)$ und zu einer festen Orthonormalbasis $(\xi_i)_i$ seien $(\lambda_i)_i$ komplexe Zahlen mit Betrag 1, sodass $\lambda_i \langle a\xi | \xi \rangle = |\langle a\xi_i | \xi_i \rangle|$. Definiere für jedes i die orthogonale Projektion p_i auf $\langle \xi_i \rangle$. Für jede endliche Indexmenge F folgt dann

$$\sum_{i \in F} |\langle a\xi_i | \xi_i \rangle| = \sum_{i \in F} \lambda_i \langle a\xi_i | \xi_i \rangle = \sum_{i \in F} \lambda_i \sum_j \langle a\xi_j | p_i \xi_j \rangle = \sum_{i \in F} \lambda_i \langle a | p_i \rangle = \left\langle a \, \middle| \, \sum_{i \in F} \lambda_i p_i \right\rangle \overset{\text{Lemma 5}}{\leq} |a|_1.$$

Damit folgt also $\sum_i |\langle a\xi_i | \xi_i \rangle| \leq |a|_1$. Die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis folgt ganz analog wie in Definition 1. Außerdem liest man an dieser Rechnung ab, dass $|\operatorname{tr}(a)| \leq |a|_1$ für alle $a \in \mathcal{L}_1(H)$, also ist tr normvermindernd und somit stetig. $\square$

Proposition 7. *a) Für zwei Elemente $x \in \mathcal{L}_2(H, K)$ und $y \in \mathcal{L}_2(K, H)$ ist $xy \in \mathcal{L}_1(H)$. Es gilt die Gleichung $\operatorname{tr}(xy) = \operatorname{tr}(yx)$.*

b) Sei $x \in \mathcal{L}(H)$ beliebig und $a \in \mathcal{L}_1(H)$. Dann ist $\operatorname{tr}(ax) = \operatorname{tr}(xa)$.

Beweis. zu a). Für ein Element $b \in \mathcal{L}_2(H)$ mit $\|b\| \leq 1$ gilt

$$|\langle xy | b \rangle| = |\langle y | x^* b \rangle| \leq |y|_2 |x^* b|_2 \leq |x|_2 |y|_2.$$

Und damit $|xy|_1 \leq |x|_2 |y|_2$. Außerdem ist

$$\operatorname{tr}(x^* y) = \langle y | x \rangle \overset{(\star)}{=} \langle x^* | y^* \rangle = \operatorname{tr}(yx^*) \quad \text{für alle } x, y.$$

Anzumerken ist dabei, dass die Identität ($\star$) zwar im Beweis von Satz 6 nur für den Fall $H = K$ gezeigt wurde, aber der Beweis für den allgemeineren Fall ganz genauso geht.

zu b). Sei $a = u|a|$ die Polarzerlegung und $(\xi_i)_i$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu $|a|$. Dann folgt

$$\mathrm{tr}(a^*x) = \sum_i \langle |a|u^*x\xi_i|\xi_i\rangle = \sum_i \langle u^*x\xi_i||a|\xi_i\rangle = \sum_i \langle x|a|u^*(u\xi_i)|u\xi_i\rangle = \mathrm{tr}(xa^*).$$

□

Definition 8. Sei $h \in \mathcal{L}_1(H)$. Dann definiert dieses ein Funktional $\varphi_h : \mathcal{L}(H) \to \mathbb{C}, x \mapsto \mathrm{tr}(xh)$.

Proposition 9. *Jedes φ_h ist σ-schwach stetig und seine Norm als Element von $\mathcal{L}(H)'$ ist $|h|_1$.*

Beweis. Sei $h = u|h|$ die Polarzerlegung. Wähle eine Orthonormalbasis $(\xi_i)_i$ von Eigenvektoren von $|h|$ zu Eigenwerten $\lambda_i \geq 0$. Dann ist

$$\varphi_h(x) = \sum_i \langle xu|h|\xi_i|\xi_i\rangle = \sum_i \langle xu\sqrt{\lambda_i}\xi_i|\sqrt{\lambda_i}\xi_i\rangle$$

Da $\sum_i \lambda_i < \infty$, sind somit $(u\lambda_i^{\frac{1}{2}}\xi_i)_i, (\lambda_i^{\frac{1}{2}}\xi_i)_i \in \ell^2(I,H)$ und die σ-schwache Konvergenz folgt sofort. Außerdem ist

$$|\varphi_h(x)| \leq \sum_i \lambda_i\langle xu\xi_i|\xi_i\rangle \leq \sum_i \|x\|\lambda_i = \|x\| \cdot |h|_1,$$

sowie

$$\varphi_h(u^*) = \sum_i \langle u^*u|h|\xi_i|\xi_i\rangle = \sum_i \langle |h|\xi_i|\xi_i\rangle = |h|_1.$$

□

Satz 10. *Sei ω ein σ-schwach stetiges Funktional auf $\mathcal{L}(H)$. Dann existiert ein $h \in \mathcal{L}_1(H)$, sodass $\omega = \varphi_h$.*

Beweis. Zunächst existieren $(\xi_n)_n, (\eta_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}, H)$, sodass ω durch diese dargestellt werden kann. Es ist

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x\xi_n|\eta_n\rangle.$$

Nun definieren wir Operatoren $a, b : \ell^2(\mathbb{N}) \to H$ durch $a(f) = \sum_n f(n)\xi_n$ bzw. $b(f) = \sum_n f(n)\eta_n$.

Nun sind $a, b \in \mathcal{L}_2(\ell^2(\mathbb{N}), H)$ Hilbert-Schmidt Operatoren. Es gilt nämlich für die Standardbasis $(e_n)_n$ von $\ell^2(\mathbb{N})$

$$\mathrm{tr}(a^*a) = \sum_n \|ae_n\|^2 = \sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty, \quad \mathrm{tr}(b^*b) = \sum_n \|be_n\|^2 = \sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty.$$

Damit folgt dann

$$\omega(x) = \sum_n \langle x\xi_n|\eta_n\rangle = \sum_n \langle xae_n|be_n\rangle = \mathrm{tr}(b^*xa) = \mathrm{tr}(xab^*).$$

Mit Proposition 7 folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Wir haben eine sesquilineare Abbildung $A : H \times H \to \mathcal{L}(H)$ in die Rang-1-Operatoren durch $A_{\xi,\eta}(v) = \langle v|\eta\rangle\xi$. Für diese Rang-1-Operatoren gilt stets $|A|_1 = \|A\|$, da A^*A ein positiver kompakter Operator mit Rang 1 ist und daher genau einen Eigenvektor zu einem nicht-verschwindenden Eigenwert λ mit $|\lambda| = \|A^*A\| = \|A\|^2$ besitzt. Es ist daher klar, dass $\|A\| = |\lambda|^{\frac{1}{2}} = |\ |A|\ |_1 = |A|_1$.

Lemma 11. *Die Rang-1-Operatoren spannen in $\mathcal{L}_1(H)$ einen dichten Unterraum auf.*

Beweis. Sei $a \in \mathcal{L}_1(H)$. Sei $a = u|a|$ die Polarzerlegung und $(\xi_i)_i$ eine fest gewählte Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\lambda_i \geq 0$. Sei $A_i = A_{a\xi_i,\xi_i}$. Sei F eine endliche Teilmenge der Indexmenge und $b \in \mathcal{L}_2(H)$ mit $\|b\| = 1$. Dann gilt folgende Abschätzung.

$$|\langle a - \sum_{j\in F} A_j | b\rangle| \leq \sum_i |\langle \big(a - \sum_{j \in F} A_j\big)\xi_i|\xi_i\rangle| = \sum_{i\notin F} |\langle a\xi_i | b\xi_i\rangle| = \sum_{i \notin F} \lambda_i |\langle \xi_i | u^* b \xi_i\rangle| \leq \sum_{i\notin F} \lambda_i \xrightarrow{F} 0$$

Und daher $a = \sum_i A_i$ in $|\cdot|_1$. □

Satz 12. *Falls $\alpha : \mathcal{L}_1(H) \to \mathbb{C}$ ein $|\cdot|_1$-stetiges Funktional ist, so existiert ein $x \in \mathcal{L}(H)$, sodass $\alpha(h) = \varphi_h(x)$ für alle $h \in \mathcal{L}_1(H)$. Außerdem gilt $\|\alpha\| = \|x\|$.*

Beweis. Es definiert $(\xi|\eta) = \alpha(A_{\xi,\eta})$ eine Sesquilinearform $(\cdot|\cdot) : H \times H \to \mathbb{C}$. Diese ist stetig wegen

$$|\alpha(A_{\xi,\eta})| \leq \|\alpha\| |A_{\xi,\eta}|_1 = \|\alpha\| \|A_{\xi,\eta}\| = \|\alpha\| \|\xi\| \|\eta\|.$$

Also existiert ein $x \in \mathcal{L}(H)$ mit $\alpha(A_{\xi,\eta}) = \langle x\xi|\eta\rangle = \frac{1}{\|\eta\|^2}\langle xA_{\xi,\eta}\eta|\eta\rangle = \operatorname{tr}(xA_{\xi,\eta}) = \varphi_{A_{\xi,\eta}}(x)$ für $\eta \neq 0$. Da Rang-1 Operatoren in $\mathcal{L}_1(H)$ einen $|\cdot|_1$-dichten Unterraum aufspannen, folgt $\alpha(a) = \varphi_a(x)$ für alle $a \in \mathcal{L}_1(H)$.

An obiger Rechnung sieht man schon $\|x\| \leq \|\alpha\|$. Weiterhin gilt für alle $h \in \mathcal{L}_1(H)$ nach Proposition 9

$$|\alpha(h)| = |\varphi_h(x)| \leq |h|_1 \|x\|$$

und daher auch $\|\alpha\| \leq \|x\|$. □

Bemerkung. Wir fassen nun unsere Ergebnisse zusammen. Sei $\mathcal{L}(H)_*$ die Menge aller σ-schwach stetigen Funktionale auf $\mathcal{L}(H)$. Über obige Zuordnung $\alpha \mapsto x$ erhalten wir einen isometrischen Isomorphismus $(\mathcal{L}(H), \|\cdot\|) \simeq (\mathcal{L}_1(H), |\cdot|_1)^*$. Über die Zuordnung $h \mapsto \varphi_h$ aus Definition 8 erhalten wir ebenfalls einen isometrischen Isomorphismus $(\mathcal{L}_1(H), |\cdot|_1) \simeq \mathcal{L}(H)_*$, also schließlich $(\mathcal{L}(H)_*)^* \simeq \mathcal{L}(H)$.

An dieser Stelle bringen wir ein elementares Lemma aus der Funktionalanalysis, um dieses Resultat zu verallgemeinern.

Lemma 13. *Sei B ein Banachraum. Für einen schwach-*-abgeschlossenen Teilraum $F \subset B^*$ definiere*

$$F^\perp = \{\, x \in B | f(x) = 0 \text{ für alle } f \in F \,\}.$$

Dann ist auf natürliche Weise $F \overset{\varphi}{\simeq} (B/_{F^\perp})^*$ über die Zuordnung $\varphi : f \mapsto [x + F^\perp \mapsto f(x)]$.

Beweis. Über die Definition des Raumes $F^\perp$ folgt zunächst sofort, dass $\varphi(f)$ immer eine wohldefinierte Abbildung. Dass diese auch stetig (und damit φ wohldefiniert) ist, zeigen wir zunächst, dass φ isometrisch ist. Dazu sei $f \in F$ mit $\|f\| = 1$. Zunächst ist für alle $x \in B$ der Übergang zum Quotienten normvermindernd, das heißt $\|x\| \geq \|x + F^\perp$, also folgt $\|f\| \leq \|\varphi(f)\|$.

Weiter wähle man sich zu beliebigen $x \in B, \varepsilon > 0$ ein $z \in x + F^\perp$ mit $\|z\| < \|x + F^\perp\| + \varepsilon$. Dann gilt

$$\frac{|\varphi(f)(x + F^\perp)|}{\|x + F^\perp\|} \leq \frac{|f(z)|}{\|z\| - \varepsilon}.$$

Wählt man $\varepsilon > 0$ nun beliebig klein, so folgt damit $\|\varphi(f)\| = \|f\|$.

Die Surjektivität folgt nun leicht. Sei $\pi : B \to B/_{F^\perp}$ die Quotientenabbildung. Zu einem $f' \in (B/_{F^\perp})^*$ liedert $f := f' \circ \pi \in B^*$ gerade das gesuchte Urbild. □

Korollar 14. *Setzt man nun* $B = (\mathcal{L}_1(H), |\cdot|_1)$*, so ist* $B^* = \mathcal{L}(H)$*. Sei nun* $M \subset \mathcal{L}(H)$ *eine von Neumann Algebra.* M *ist* σ*-schwach abgeschlossen, das heißt gerade schwach-*-abgeschlossen in* $\mathcal{L}(H)$ *(siehe Beweis von Satz 10). Wir wenden Lemma 13 an und erhalten*

$$(\mathcal{L}_1(H)/_{M^\perp})^* \simeq M.$$

Dabei ist $M^\perp = \{ a \in \mathcal{L}_1(H) | \operatorname{tr}(ax) = 0 \text{ für alle } x \in M \}$*. Sei* M_* *die Menge aller* σ*-schwach stetigen Funktionale auf* M*. Durch die Identifizierung* $\mathcal{L}_1(H)/_{M^\perp} \simeq M_*, a + M^\perp \mapsto [x \mapsto \operatorname{tr}(ax)]$ *erhalten wir*

$$M \simeq (M_*)^*.$$

Beweis. Wir verlieren an dieser Stelle nur noch ein paar Worte darüber, warum obige Identifizierung ein Isomorphismus ist. Der einzige Knackpunkt ist die Surjektivität. Diese erhalten wir aber leicht, indem wir Hahn-Banach anwenden. Zu $f \in M_*$ wähle man sich eine σ-schwach stetige Fortsetzung $\tilde{f} \in \mathcal{L}(H)_*$, welches wir eindeutig mit einem gewissen $a \in \mathcal{L}_1(H)$ identifizieren können. Die Differenz zweier solcher Fortsetzungen muss aber bereits in $M^\perp$ sein, folglich liefert diese Zuordnung ein eindeutig bestimmtes Element $a + M^\perp \in \mathcal{L}_1(H)/_{M^\perp}$. □

Nun kommt ein technisches Lemma, welches einen Ausblick auf die Tomita-Takesaki Theorie gibt.

Lemma 15. *Sei* M *eine von Neumann Algebra und* $\varphi : M \to \mathbb{C}$ *ein* σ*-schwach stetiger Zustand. Sei* $\lambda > 0$ *eine beliebige positive Zahl. Ist nun* $\psi \in M_*$ *mit der Eigenschaft*

$$|\psi(y^*x)|^2 \leq \varphi(x^*x)\varphi(y^*y) \quad \text{für alle } x, y \in M,$$

so existiert ein $a \in M_{1/2}$*, sodass*

$$\psi(x) = \lambda\varphi(ax) + \lambda^{-1}\varphi(xa) \quad \text{für alle } x \in M.$$

Beweis. Definiere eine (σ-schwach zu schwach-*) stetige lineare Abbildung $\alpha : M \to M_*$ via $a \mapsto \theta_a = [x \mapsto \varphi(\lambda ax + \lambda^{-1}xa)]$. Dann folgt daraus zunächst, dass $\alpha(M_1) \subset M_*$ kompakt und konvex ist.

Nehme nun an, es sei $\psi \notin \alpha(M_{1/2})$. Dann ist $D_h = \sup \{ \operatorname{Re}(\theta_a(h)) | a \in M_{1/2} \} < \infty$ für alle $h \in M$. Nach Hahn-Banach ist ein gewisses $h \in M$ wählbar, sodass $\operatorname{Re}(\psi(h)) > D_h = D$. Sei nun $h = u|h| = |h^*|u$ die Polarzerlegung. Dann ist

$$\theta_{u^*/2}(h) = \frac{1}{2}(\lambda\varphi(|h|) + \lambda^{-1}\varphi(|h^*|)).$$

Dann folgt einerseits

$$D < |\psi(h)| = |\psi(u|h|^{1/2}|h|^{1/2})| \leq \sqrt{\varphi(|h|)}\sqrt{\varphi(u|h|u^*)} = \sqrt{\varphi(|h|)}\sqrt{\varphi(|h^*|)},$$

aber andererseits auch

$$2\sqrt{\varphi(|h|)}\sqrt{\varphi(|h^*|)} = 2\sqrt{\lambda\varphi(|h|)}\sqrt{\lambda^{-1}\varphi(|h^*|)} \leq \lambda\varphi(|h|) + \lambda^{-1}\varphi(|h^*|) = 2\theta_{u^*/2}(h) \leq 2D.$$

Dies führt zum Widerspruch.

□