Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 27.10.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 2

Aufgabe 1. Für alle $a, b > 0$ ist das *arithmetische, geometrische* beziehungsweise *harmonische Mittel* definiert durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) := \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})}.$$

(a) Beweise die Ungleichungen $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$.

(b) Zeige, dass $H(a,b) = A(a,b)$ nur im Fall $a = b$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $0 < a < b$. Wir definieren $a_1 := a$ und $b_1 := b$ sowie

$$a_{n+1} := H(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} := A(a_n, b_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) $G(a_n, b_n) = \sqrt{ab}$,

(b) $a_n < a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1} < b_n$,

(c) $b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

Bemerkung: Somit ist $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung der reellen Zahl $\sqrt{ab}$

Aufgabe 3. Zeige (zum Beispiel per Induktion über $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$):

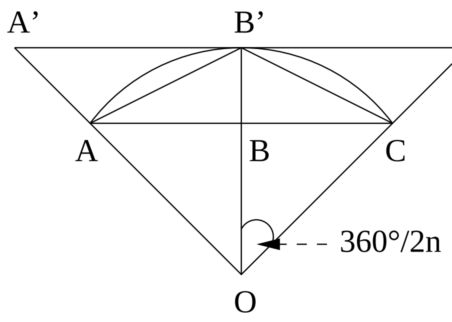
(a) Sind X und Y n-elementige Mengen, so gibt es genau $n!$ verschiedene bijektive Abbildungen von X nach Y.

(b) Jede n-elementige Menge X besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen.

(c) Jede n-elementige Menge X besitzt genau $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ verschiedene k-elementige Teilmengen.

(*Hinweis:* Wähle jeweils ein $x \in X$ und betrachte dann die Behauptung für die $n-1$-elementige Teilmenge $X \setminus \{x\}$.)

Aufgabe 4. Für alle $n \geq 3$ bezeichne f_n und F_n die Fläche des dem Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) ein- beziehungsweise umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Zeige, dass $f_{2n} = G(f_n, F_n)$. (*Bemerkung:* Ferner gilt $F_{2n} = H(f_{2n}, F_n)$.)
(*Hinweis:* Für zwei Punkte A, B bezeichne $|AB|$ die Länge der Strecke von A nach B. Drücke f_{2n}, f_n, F_n mit Hilfe der Strecken $|AB|$, $|A'B'|$, $|OB|$ in umseitiger Skizze aus und benutze den Strahlensatz.)


A’
B’
C’
A
B
C
360°/2n
O