Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 11/12

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 03.11.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 3

Aufgabe 1. Bestimme Real- und Imaginärteil sowie Betrag von

(a) $\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$, (b) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}}$, (c) $(1+\mathrm{i})^n$, (d) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^n$

für $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Arbeite gegebenenfalls mit Polarkoordinaten.

Aufgabe 2. (a) Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und definiere

$$w := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\epsilon\sqrt{|z|+x} + \mathrm{i}\sqrt{|z|-x}\right), \quad \text{wobei } \epsilon := \begin{cases} y/|y|, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $\pm w$ die beiden Wurzeln aus z sind, also $w^2 = (-w)^2 = z$ gilt.

(b) Zeige, dass die Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{C}$ die Lösungen

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}$$

besitzt, wobei $\pm\sqrt{p^2-4q}$ die beiden Wurzeln (nach (a)) aus $p^2 - 4q$ bezeichne.

Aufgabe 3. Skizziere die folgenden Mengen:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq |\mathrm{i}z - 1|\}$, (b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1 - \mathrm{i}| \leq 1\}$.

Bitte wenden!

Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks mit Zirkel und Lineal

1. Konstruiere in der Gaußschen Zahlenebene den Einheitskreis S mit Mittelpunkt 0 und Radius 1. Die Schnittpunkte des Kreises mit der x-Achse seien $A = 1 \in \mathbb{C}$ und $B = -1 \in \mathbb{C}$.

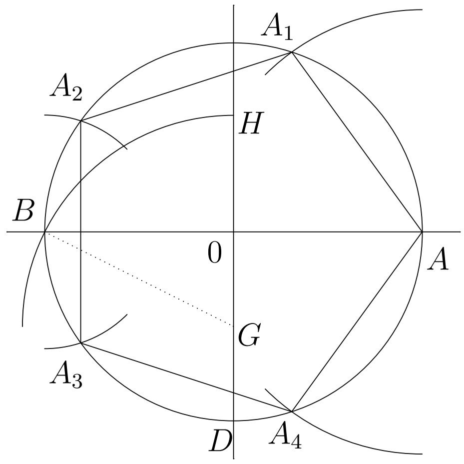
2. Konstruiere das Lot L auf $\overline{AB}$ durch 0 (y-Achse). Sei D einer der Schnittpunkte mit dem Einheitskreis S. Konstruiere den Mittelpunkt G von $\overline{0D}$.

3. Zeichne um G einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{GB}|$. Der Schnittpunkt des Kreisbogens mit $L(= y$-Achse), welcher innerhalb S liegt, sei H.

4. Zeichne um B einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{0H}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_2 und A_3.

5. Zeichne um A einen Kreisbogen mit Radius $|\overline{A_2A_3}|$. Die beiden Schnittpunkte mit S seien A_1 und A_4, wobei A_1, A_2 auf der gleichen Seite von $\overline{AB}$ liegen.

Dann sind (A, A_1, A_2, A_3, A_4) die Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks.



Aufgabe 4. (a) Zeige, dass die Länge $h := |\overline{0H}|$ das Inverse des goldenen Schnittes ist, also $h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt.

(b) Zeige, dass die Koordinaten $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ der Eckpunkte A_n, mit $n = 1, 2, 3, 4$, gegeben sind durch

$$z_1 = \overline{z_4} = \frac{h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3+h}\,, \qquad z_2 = \overline{z_3} = -\frac{1+h}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2-h}\,.$$

(*Hinweis:* Für das Inverse des goldenen Schnittes gilt $h^2 = 1 - h$.)

(c) (Zusatzaufgabe, 2 Zusatzpunkte)
Beweise die Identitäten $z_1^n = z_n$ für $n = 2, 3, 4$ und $z_1^5 = 1$.
(*Hinweis:* Es genügt, $z_1^2 = z_2$, $z_2^2 = z_4$, $z_1 z_4 = 1$ zu zeigen — warum?)