Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 11/12

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 17.11.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen   Blatt 5

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4-a \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die Dimension von $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3, u_4) \subseteq \mathbb{R}^4$ in Abhängigkeit von a.

(b) Für welche (möglicherweise unendlich viele) Werte von a und b liegt v in U?

Aufgabe 2. (a) Bestimme eine Basis und die Dimension des Untervektorraums $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbb{R}^4$, wobei

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(b) Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^6$ zwei *verschiedene* 4-dimensionale Untervektorräume. Welche Werte kann dann $\dim(V \cap W)$ annehmen?

Aufgabe 3. Sei K ein Körper. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ heißt *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$, und *schief-symmetrisch*, falls $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

(a) Zeige, dass alle symmetrischen bzw. alle schief-symmetrischen Matrizen je einen Untervektorraum von $M(n \times n, K)$ bilden, und bestimme dessen Dimension.

(b) Zeige, dass es für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ genau eine symmetrische Matrix A_+ und eine schief-symmetrische Matrix A_- gibt mit $A = A_+ + A_-$.

Aufgabe 4. Sei $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{R}^4$ und $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \; u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Dimension von $U, V, U + V, U \cap V$.