Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übung zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 15.12.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $P_n[x]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$.

(a) Prüfe, ob die folgenden Ausdrücke ein Skalarprodukt und eine Norm auf $P_n[x]$ definieren:

$$\langle f, g \rangle := \sup_{k \in \{0,\dots,n\}} \overline{f\left(\tfrac{k}{n}\right)} g\left(\tfrac{k}{n}\right) \qquad \text{für alle } f, g \in P_n[x],$$

$$\|f\| := \sup_{k \in \{0,\dots,n\}} \left| f\left(\tfrac{k}{n}\right) \right| \qquad \text{für alle } f \in P_n[x].$$

(*Hinweis* zum Skalarprodukt: Berechne z.B. $\langle 1, 1-x \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, x \rangle$.)

(b) Zeige, dass die Teilmenge $P_n^0[x] = \{f \in P_n[x] \ : \ f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von $P_0[x]$ ist, und bestimme eine Basis für $P_n^0[x]$.

Aufgabe 2. (a) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{z+2}{(z-3)(z-5)}$, also $A, B \in \mathbb{C}$ mit $\dfrac{z+2}{(z-3)(z-5)} = \dfrac{A}{z-3} + \dfrac{B}{z-5}$.

(b) Bestimme die Partialbruchzerlegung von $\dfrac{1}{(z-2\mathrm{i})^n (z+3\mathrm{i})}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Führe folgende Polynomdivisionen (gegebenenfalls mit Rest) durch:

(a) $\dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x}{x+4}$, (b) $\dfrac{2x^4 - 17x^3 + 26x^2 - 13x + 2}{2x^2 - 3x + 1}$.

Aufgabe 4. Bestimme die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(k!)^2} z^{2n}$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n!}}{2^n} z^n$, (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$,

(d) die *hypergeometrische Reihe* zu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{n! (\gamma)_n} z^n, \quad \text{wobei } (\delta)_n := \delta(\delta+1)(\delta+2)\cdots(\delta+n-1).$$

(*Hinweis:* Verwende z.B. das Quotientenkriterium.)