Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übung zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 22.12.11 bis 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $(f_n)_n$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, siehe Blatt 1 und Blatt 7.

(a) Bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$.

(b) Zeige, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ im obigen Konvergenzbereich gilt:

$$F(z) = z + F(z)(z + z^2).$$

(c) Gegen welche rationale Funktion konvergiert $F(z)$ im Inneren des Konvergenzkreises?

Aufgabe 2. (a) Zeige, dass durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

eine Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Bestimme die offenen und die abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R}^2, d)$.

(c) Prüfe, ob die Identität auf $\mathbb{R}^2$ als Abbildung $(\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ oder als Abbildung $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d)$ stetig ist, wobei d_2 die euklidische Metrik (Beispiel 16.4 mit $p = 2$) bezeichne.

Aufgabe 3. (a) Zeige, dass durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2, & x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Zeichne $K_2((3,3))$ und $K_2((0,1))$ in $(\mathbb{R}^2, d)$.

(c) Zeige, dass eine Folge $(x_n)_n$ in $(\mathbb{R}^2, d)$ genau dann konvergiert, wenn $(\|x_n\|_2)_n$ eine Nullfolge ist oder $(x_n)_{n \geq N}$ konstant ist für ein $N \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Prüfe die folgenden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(*Hinweis:* Verwende eventuell Polarkoordinaten ($x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$) oder untersuche die Bilder der Geraden $y = \lambda x$ bzw. $x = \lambda y$ unter f, g.)