Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 11/12

Übung zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 12.01.12 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $\epsilon = \dfrac{1}{2011}$. Bestimme ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x-1| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{x}{x^2-x+1} - 1\right| < \epsilon.$$

Aufgabe 2. Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, aufgefaßt als metrischer Raum mit dem Abstand $d(v,w) = \|v-w\| = \sqrt{\langle v-w, v-w\rangle}$. Zeige:

(a) Für jedes $w \in V$ ist die Abbildung $\langle w,\ .\ \rangle \colon V \to \mathbb{R}$, gegeben durch $v \mapsto \langle w, v\rangle$, stetig.

(b) Für jede Teilmenge $M \subset V$ ist das *orthogonale Komplement*

$$M^\perp := \{v \in V \;:\; \langle m, v\rangle = 0 \text{ für alle } m \in M\}$$

ein *abgeschlossener Untervektorraum* von V, d.h. $M^\perp \subset V$ ist Untervektorraum und als Teilmenge $M^\perp \subset V$ abgeschlossen bezüglich der Metrik d. (Hinweis: Beweise zunächst den Fall $M = \{w\}$ für ein $w \in V$. Für die Abgeschlossenheit verwende (a).)

Aufgabe 3. Untersuche, ob folgende folgende Funktionslimites existieren, und bestimme sie gegebenenfalls:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(1 - \sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$.

Aufgabe 4. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeige, dass es ein $x_0 \in [a,b]$ gibt mit $f(x_0) = x_0$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ und $f, g \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte $f(a) \le g(a)$ und $f(b) \ge g(b)$. Zeige, dass es ein $x_0 \in [a,b]$ gibt mit $f(x_0) = g(x_0)$.