Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 11/12**

Übung zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 19.01.12 bis 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 12

Aufgabe 1. (a) Sei $a \in]0,1[\cup]1,\infty[$. Zeige, dass die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $x \mapsto a^x$, eine Umkehrabbildung $\log_a := f^{-1}\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ besitzt, und dass $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$ für alle $y \in]0,\infty[$.

(b) Gib eine Reihenentwicklung der Funktion $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$ für $x \in]-1,1[$ an.

(c) Zeige unter Verwendung von (b):

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3(2n+1)9^n},$$
$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{5(2n+1)25^n} \right),$$
$$\ln 5 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3(2n+1)9^n} + \frac{2}{9(2n+1)81^n} \right).$$

Aufgabe 2. Wir definieren zwei Folgen von Polynomen $(T_n)_n$ und $(U_n)_n$ rekursiv durch

$$T_{n+1}(y) = 2yT_n(y) - T_{n-1}(y), \qquad T_0(y) = 1, \qquad T_1(y) = y,$$
$$U_{n+1}(y) = 2yU_n(y) - U_{n-1}(y), \qquad U_0(y) = 1, \qquad U_1(y) = 2y.$$

für alle $y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(nx) = T_n(\cos x), \qquad \sin(nx) = \sin x \cdot U_{n-1}(\cos x).$$

Aufgabe 3. Zeige, dass für alle $\phi \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\phi) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\phi}{2}} \cos\left(n\frac{\phi}{2}\right), \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\phi) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\phi}{2}\right)}{\sin\frac{\phi}{2}} \sin\left(n\frac{\phi}{2}\right).$$

Aufgabe 4. Zeige:

(a) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\operatorname{artanh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ für alle $z \in]-1,1[$;

(c) $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(d) $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.