Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann

WS 11/12

Lösungshinweise zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: bis Donnerstag, 26.01.12 bis 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 13

Aufgabe 1. Berechne die Ableitungen $f'(x)$ für

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\mathrm{e}^x}, & x \in \mathbb{R}, \\ \text{(b)} & f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}, & x \in \mathbb{R}, \\ \text{(c)} & f(x) = x^{(x^2)}, & x \in]0,\infty[, \\ \text{(d)} & f(x) = x \operatorname{artanh} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{1,-1\}, \end{array}$$

Aufgabe 2. Berechne die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)} \lim_{x\to a} \frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{1-\cos x}, \quad \text{(c)} \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln x}{x^2-1}, \quad \text{(d)} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x}\right).$$

Aufgabe 3. Seien $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine auf ganz $\mathbb{R}$ konvergente Potenzreihe $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$, welche das *Airy-Anfangswertproblem*

$$y''(x) - xy(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \qquad y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_1$$

löst (dabei ist $y'' = (y')'$). Zeige für die Koeffizienten dieser Potenzreihe:

(a) $y_{n+2} = \dfrac{y_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$ für alle $n \geq 1$.

(b) $y_{3n} = \dfrac{y_0}{(2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1))\cdot 3^n(n!)}$, $y_{3n+1} = \dfrac{y_1}{(4\cdot 7\cdots(3n+1))3^n n!}$, $y_{3n+2} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeige:

(a) Es gibt eindeutig bestimmte stetige Funktionen $h, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad g(x) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \quad \text{für alle } x \in]a,b[.$$

(b) Für jedes γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ existiert ein $x \in [a,b]$ mit $\gamma = h(x)$ oder $\gamma = g(x)$.

(c) Für jedes γ zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\gamma = f'(\xi)$.

(*Bemerkung:* Obwohl f' nicht stetig zu sein braucht, erfüllt f' also die Aussage des Zwischenwertsatzes.)