WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Fourier-Transformation: Grundlagen

Rebecca Schulz

Seminar: Integraltransformationen

Dozent: Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar

WS 2012/2013

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

30.10.2012

Inhaltsverzeichnis

1 Definition: Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformation erlaubt es ein Zeitsignal einer aperiodischen Funktion f(x) in ein Spektrum $F(\omega)$ zu zerlegen. Dabei gibt f(x) den Zeitbereich an und $F(\omega)$ den Frequenzbereich. Demnach kann angenommen werden, dass x = Zeit ist und ω= Frequenz. Die Fouriertransformation sieht wie folgt aus:

Definiton 1.1: *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle x, $\omega \in \mathbb{R}$:*

$$F_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

bezeichnet die Fourier-Transformation von f.

Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $n \geq 1$ gilt :

$$F_f(\omega) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i<x,\omega>}dx.$$

Dabei stellt $< x, \omega >$ das Skalarprodukt dar.

Die Fourier-Transformation ist also eine Abbildung der Form: $f(x) \rightarrow F(\omega, x)$.
Dabei stellt $e^{-i\omega x}$ beziehungsweise $e^{-i<x,\omega>}$ den Integrationskern der Fourier-Transformation dar.

Bemerkung 1.2: Im Weiteren beschäftigen wir uns mit der Fourier-Transformation im $L^1(\mathbb{R})$. Die Sätze gelten entsprechend im $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 1.3: *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine gerade Funktion und $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, dann gilt:*

$$F_{\cos}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)dx$$

bezeichnet die Kosinus-Transformation von f.

Folgerung 1.4: *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine ungerade Funktion und $x \in \mathbb{R}^{\geq 0}$,dann gilt:*

$$F_{\sin}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x)(-sin(\omega x))dx$$

bezeichnet die Sinus-Transformation von f.

Beweis: (1.3/1.4) Klar, einfach aus $F_f(\omega)$ herleiten.

2 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Viele der gelernten Eigenschaften aus Linearer Algebra I & II und Analysis I & II für Funktionen gelten auch für die Fourier-Transformation.

Satz 2.1: *Seien f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ und a,b $\in \mathbb{C}$. Es gilt:*
(i) $F(\omega)$ *ist linear:*

$$F_{af+bg}(\omega) = aF_f(\omega) + bF_g(\omega)$$

(ii) $F(\omega)$ *ist beschränkt:*

$$\mid F_f(\omega) \mid \leq \parallel f \parallel_1$$

(iii) *Für die komplex konjugierte Fourier-Transformation gilt:*

$$\overline{F_f(\omega)} = F_f(-\omega)$$

mit f(x) $\in \mathbb{R}$.

Beweis: (i) Klar, einfach ausrechnen.

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \mid F_f(\omega) \mid &= \mid \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \mid \\
&\leq \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid \quad \mid e^{-i\omega x} \mid dx \\
&\underbrace{=}_{\mid e^{-i\omega x}\mid=1} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid dx \\
&\leq \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid dx \\
&= \parallel f \parallel_1 \qquad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii)\mathrm{F}_f(-\omega) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(-\omega)x}dx \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx \\
&= \overline{\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx} \\
&= \overline{F_f(\omega)} \qquad \square
\end{aligned}$$

Satz 2.2: $F_f(\omega)$ *ist eine stetige und konvergente Funktion.*

Beweis: Die Stetigkeit der Fourier-Transformation beweisen wir über Folgenstetigkeit. Dazu definieren wir uns eine beliebige Folge ω_n in $\mathbb{R}$ mit $\omega_n \to \omega \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

$lim_{n\to\infty}F_f(\omega_n) = lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega_n x}dx$

$$\underbrace{=}_{Satz\ der\ dominierten\ Konvergenz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$
$$= F_f(\omega) \qquad \square$$

Die Konvergenz folgt aus dem folgenden Lemma.

Lemma 2.3: (Riemann-Lebesgue-Lemma) *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Es gilt:*

$$lim_{\omega\to\infty} \mid F_f(\omega) \mid = 0.$$

$$lim_{\omega\to-\infty} \mid F_f(\omega) \mid = 0.$$

Beweis: [Vgl. 5, S.96f]

Bemerkung 2.4: Ist $f(x) \in \mathbb{R}$ für alle x $\in \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, so ist $F_f(\omega)$ ebenfalls eine gerade Funktion $\in \mathbb{R}$.
Ist $f(x) \ \in \mathbb{R}$ für alle $x \ \in \mathbb{R}$ eine ungerade Funktion, so ist $F_f(\omega)$ ebenfalls ungerade und rein imaginär.

Beweis: Wir beweisen den zweiten Teil, der erste Teil geht analog.
$F_f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$\underbrace{=}_{Euler} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(cos(\omega x) - isin(\omega x))dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos(\omega x)dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin(\omega x)dx)$
$\underbrace{=}_{cos\ gerade} \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin(\omega x)dx \qquad \square$

Definition und Satz 2.5: (n-te Moment) *Sei f eine n-mal stetig differenzierbare Funktion und für die k-ten Ableitungen gelte $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $k \leq n$. Dann gilt:*

$$F_{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n F_f(\omega)$$

n stellt das n-te Moment dar.

Beweis per Induktion: Induktionsanfang bei $n = 1$:
$F_{f^{(1)}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(1)}(x)e^{-i\omega x}dx$
$\underbrace{=}_{partielle\ Integration} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[f(x)e^{-i\omega x}dx]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$\underbrace{=}_{lim_{x\to+/-\infty}f=0} i\omega F_f(\omega)$
Induktionsschluss: Die Induktionsvoraussetzung $F_{f^{(n)}}(\omega) = (i\omega)^n F_f(\omega)$ gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \to n+1:$
$F_{f^{(n+1)}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n+1)}(x) e^{-i\omega x} dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f^{(n)}(x) e^{-i\omega x} dx]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^(n)(x) e^{-i\omega x} dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [f^{(n-1)}(x) e^{-i\omega x} dx]_{-\infty}^{\infty} + \frac{(i\omega)^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n-1)}(x) e^{-i\omega x} dx$
$= \ldots = \frac{(i\omega)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$ $\square$

Bemerkung 2.6: Die Formel vom $n - ten\ Moment$ wird benötigt, um Differentialgleichungen zu lösen.

Satz 2.7: *Sei $\int_{-\infty}^{\infty} \mid x^n f(x) \mid dx$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent und $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist $F_f(\omega)$ n-mal stetig differenzierbar und genügt folgender Gleichung:*

$$F_{x^n f(x)}(\omega) = \frac{i^n d^n}{d\omega^n} F_f(\omega).$$

Beweis der Formel per Induktion: Induktionsanfang für n=1:
$\frac{d}{d\omega} F_f(\omega) = \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [f(x) e^{-i\omega x}] dx$
$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) e^{-i\omega x} dx$
$= -i F_{xf(x)}(\omega)$
$\Longleftrightarrow \frac{id}{d\omega} F_f(\omega) = F_{xf(x)}(\omega)$
Induktionsschluss: Die Induktionsvoraussetzung $F_{x^n f(x)}(\omega) = \frac{i^n d^n}{d\omega^n} F_f(\omega)$ gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt: $n \to n+1:$
$\frac{d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} F_f(\omega) = \frac{d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} [f(x) e^{-i\omega x}] dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^{n+1} f(x) e^{-i\omega x} dx$
$= \frac{-i^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1} f(x) e^{-i\omega x} dx$
$\Longleftrightarrow \frac{i^{n+1} d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} F_f(\omega) = F_{x^{n+1} f(x)}$ $\square$

Korollar 2.8: *Seien f, $g \in L^1(\mathbb{R})$ und a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und g(x)=f(ax+b) Dann gilt:*

$$F_g(\omega) = \frac{1}{|a|} e^{i\omega \frac{b}{a}} F_f(\frac{\omega}{a}).$$

Beweis: $F_g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax+b) e^{-i\omega x} dx$
Substituiere $z = ax + b \Longleftrightarrow x = \frac{z-b}{a} \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = a$ Daraus folgt nun:
$F_g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{i\omega(z-b)}{a}} \frac{dz}{|a|}$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{i\omega z}{a} + \frac{i\omega b}{a}} dz$
$= e^{\frac{i\omega b}{a}} \frac{1}{|a|} F_f(\frac{\omega}{a})$ $\square$

Folgerung 2.9: *Sei im vorigen Korollar a=1, dann gilt:*

$$F_g(\omega) = e^{i\omega b} F_f(\omega).$$

Sei b=0, dann gilt:

$$F_g(\omega) = \frac{1}{|a|} F_f(\frac{\omega}{a}).$$

Diese Funktion wird auch als eine um a skalierte Funktion bezeichnet. Für a>1 wird von Stauchung gesprochen und für a<1 von Streckung.

Beweis: Klar, einfach ausrechnen.

Satz 2.10: (Berechnung $F(\omega)$ für rationale Funktionen)*Für $\omega \geq 0$ sei C_R die untere Hälfte des Einheitskreises und für $\omega \leq 0$ sei C'_R, die obere Hälfte des Einheitskreises jeweils von der Länge πR. Hat f(x) eine analytische Fortsetzung f(z) mit $z \in \mathbb{C}$, Definitionslücken bei $z_a \in C'_R$ und $z_b \in C_R$, ist f absolut integrierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und gilt $lim_{R\to\infty} max_{z\in C_R \bigcup C'_R} \mid f(z) \mid = 0$, dann gilt:*

$$F(\omega) = -i\sqrt{2\pi} \sum_b Res[f(z)e^{-i\omega z}; z_b]$$

für $\omega \geq 0$

$$F(\omega) = i\sqrt{2\pi} \sum_a Res[f(z)e^{-i\omega z}; z_a]$$

für $\omega \leq 0$.

Beweis: Folgt aus dem Residuensatz.

3 Faltung

In der Mathematik gibt es viele Rechenoperationen, um aus zwei Funktionen eine neue Funktion zu erstellen. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer neuen Rechenoperation - der sogenannten Faltung. Dieses Kapitel bezieht sich hauptsächlich auf das Buch von Pinkus und Zafrany [5].

Definition 3.1: *Seien f, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Es gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$:*

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$$

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Die Forderung, dass $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ (und nicht in $L^2(\mathbb{R})$ sein müssen) reicht hier aus. Schließlich wissen wir, dass $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ über $\mathbb{R}^2$ integrierbar ist. Wenden wir den Transformationssatz $((x) \mapsto (x-y))$ an, ist auch $f(x-y)g(y)$ über $\mathbb{R}^2$ integrierbar. Nach Fubini existiert das y-Integral und die Faltung ist über x integrierbar.
Hieraus folgen 3.2 und 3.3:

Folgerung 3.2: *Die Rechenoperation der Faltung ist kommutativ, das heißt es gilt:*

$$f \star g = g \star f.$$

Proposition 3.3: *Sind $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dann existiert $f \star g$ und ist absolut integrierbar.*

Satz 3.4: (Faltungssatz) *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dann gilt:*

$$F_{f \star g}(\omega) = \sqrt{2\pi} F_f(\omega) F_g(\omega).$$

Beweis: Aus der vorigen Proposition folgt, dass f und g absolut integrierbar sind.

$$\begin{aligned}
F_{f\star g}(\omega) &\underbrace{=}_{1.1} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (f \star g)(x) e^{-i\omega x} dx \\
&\underbrace{=}_{3.1} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y)g(y)dy)) e^{-i\omega x} dx \\
&\underbrace{=}_{Satz\ von\ Fubini} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} g(y) e^{-i\omega y} dx dy \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-i\omega(x-y)} dx) g(y) e^{-i\omega y} dy
\end{aligned}$$

Substituiere $z = x - y \Longleftrightarrow x = z + y \Longrightarrow dx = dz$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F_{f\star g}(\omega) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} (\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i\omega z} dz) g(y) e^{-i\omega y} dy \\
&= F_f(\omega) \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-i\omega y} dy \\
&= F_f(\omega) \sqrt{2\pi} F_g(\omega) \qquad \square
\end{aligned}$$

4 inverse Fourier-Transformation/Plancherelformel

Die Fourier-Transformation kann rückgängig gemacht werden, wodurch die ursprüngliche Funktion f(x) wieder erhalten wird.

Satz 4.1: (Umkehrformel) *Seien $f, F_f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Beweis: Für $\lambda > 0$ definiere $g_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) e^{i\omega x} e^{\frac{-\lambda^2}{2}\omega^2} d\omega$. Aus 2.1 wissen wir, dass $F_f(\omega)$ beschränkt ist. Somit existiert dieses Integral für $\lambda > 0$.
Es gilt:
$g_\lambda(x) \underbrace{=}_{1.1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\omega y} dy) e^{i\omega x} e^{-\frac{(\lambda\omega)^2}{2}} d\omega$
$\underbrace{=}_{Transformationssatz*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y+x) e^{-i\omega y} e^{-\frac{(\lambda\omega)^2}{2}}$
$*y \mapsto y + x$
Nun wissen wir, dass $(y, \omega) \mapsto f(y) e^{-\frac{(\lambda\omega)^2}{2}}$ über R^2 integrierbar ist. Nach Hölder bleibt dies auch nach der Verschiebung $(y \mapsto y + x)$ und der Multiplikation mit der L^∞-Funktion $e^{i\omega y}$(**).
Betrachte die Funktion $h(x) = e^{-\frac{(\lambda x)^2}{2}}$ und bestimme die Fourier-Transformation $F_h(\omega)$:
$F_h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\lambda^2}{2}x^2 - i\omega x} dx \underbrace{=}_{-\frac{\lambda^2}{2} ausklammern, quadr.\ Ergänzung} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\omega^2}{2\lambda^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\lambda^2}{2}(x - \frac{i\omega}{\lambda^2})^2} dx.$
Nun benutze die Γ-Funktion: $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$
Schließlich gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}(x - \frac{i\omega}{\lambda^2})^2} dx$
$\underbrace{=}_{u = x - \frac{i\omega}{\lambda^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\lambda^2}{2}u^2} du = 2\int_0^\infty e^{\frac{-\lambda^2}{2}u^2} du \underbrace{=}_{t = \frac{\lambda^2 u^2}{2}} 2\int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{u\lambda^2} \underbrace{=}_{u = \sqrt{t}\frac{\sqrt{2}}{\lambda}} 2\int_0^\infty e^{-t} \frac{\lambda dt}{\sqrt{2t}\lambda^2} = \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt$
$= \Gamma(\frac{1}{2}) \frac{\sqrt{2}}{\lambda} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda^2}}.$
Dann ist $F_h(\omega) = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{-\omega^2}{2\lambda^2}}$.
Somit gilt mit $x \mapsto \omega$ und $\omega \mapsto y$: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\lambda\omega)^2}{2}} e^{-i\omega y} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda} e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}}$.
Setze $\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y^2}{2\lambda^2}} =: \delta_\lambda(y)$ *(Dirac-Folge)*
Wegen (**) dürfen wir Fubini anwenden und erst das ω-Integral berechnen:
$g_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy\ f(y+x) \delta_\lambda(y)$.
Zum Einen muss nun noch gezeigt werden, dass gilt: $lim_{\lambda \to 0} g_\lambda(x) = f(x)$ in der L^1-Norm. Hierfür verwende, dass gilt: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2\lambda^2}} dy \underbrace{=}_{Gaußsches\ Fehlerintegral} 1.$
Dadurch ergibt sich: $f(x) - g_\lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f(x+y)) \frac{e^{\frac{-y^2}{2\lambda^2}}}{\lambda} dy.$
Zum Anderen muss bewiesen werden, dass $F_f(\omega) e^{i\omega x} e^{-\frac{(\lambda\omega)^2}{2}}$ für $\lambda \to 0$ punktweise gegen $F_f(\omega) e^{i\omega x}$ konvergiert und $\mid F_f(\omega) e^{i\omega x} e^{-\frac{(\lambda\omega)^2}{2}} \mid$ durch $\mid F_f(\omega) \mid$ beschränkt ist. Mit dem Satz der dominierten Konvergenz folgt dann: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) e^{i\omega x} d\omega = lim_{\lambda \to 0} g_\lambda(x)$.
Beides zusammen liefert dann die Behauptung.
[Vgl. 9, S. 118ff]

Satz 4.2: (doppelte Fouriertransformation) *Seien $f, F_f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt:*

$$F_{F_f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-x).$$

Beweis: $F_{F_f}(\omega)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) e^{-i\omega x} d\omega$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) e^{i\omega(-x)} d\omega$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(-x)$ □

Satz 4.3: (Satz von Plancherel) *Seien $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega)\overline{F_g(\omega)}d\omega.$$

Beweis: Wir wissen, da f & g $\in L^2(\mathbb{R})$, dass $f(x)\overline{g(x)} \in L^1(\mathbb{R})$ ist nach Hölder. Zudem ist $e^{i\omega x}$ integrierbar, sodass wir den Satz von Fubini anwenden dürfen.
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \underbrace{=}_{4.1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) e^{i\omega x} d\omega)\overline{g(x)}dx$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega)\overline{g(x)} e^{i\omega x} dx \; d\omega$
$= \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega)\overline{(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\omega x} dx)} d\omega$
$\underbrace{=}_{1.1} \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega)\overline{F_g(\omega)}d\omega$ □

Satz 4.4: (Energieerhaltungsformel) *Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$, dann gilt:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(x) \mid^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mid F_f(\omega) \mid^2 d\omega.$$

Die linke Seite stellt das Energiesignal in Abhängigkeit von der Zeit dar. Die rechte Seite repräsentiert die Energie abhängig von der Frequenz.

Beweis: Die Formel folgt aus dem Satz von Plancherel mit f=g □

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

Die Literaturangaben sind alphabetisch nach dem Namen der Autoren angeordnet. Bei der Angabe mehrerer Autoren, ist der Name des ersten Autors berücksichtigt.

[1] B. Forster, Fourier- und Laplace-Transformation, Vorlesungsskript TU München, http://www.gm.fh-koeln.de/afomusoe/SS2012/Mathe/fourier-laplace_Skript.pdf (Stand September 2012)

[2] O. Forster, J. Wehler, Fourier-Transformation und Wavelets, Vorlesungskript LMU München, http://www.pst.informatik.uni-muenchen.de/personen/wehler/wavelets10.PDF (Stand Oktober 2012)

[3] K. Gerhardt, Lehrbuch der Mathematik, Analysis I, http://books.google.de/books?id =8hm6ZdsdA0QC&pg=&lpg=PA286&dq=beweis++absolut+integrierbar&source =bl&ots=dJtsFIBjmF&sig=nYbV-sNWemBbtvKpp2mX3OIpv8o&hl=de&sa=X&ei =MBR5UJ-lAozDtAag1IDgBA&ved=0CCQQ6AEwAAv=onepage&q=beweis (Stand Oktober 2012)

[4] K. Königsberger,Analysis II, Springer, 2. Auflage, 1997

[5] A.Pinkus & S.Zafrany, Fourier Series and Integral Transforms, Cambridge University Press, 1997

[6] A.D. Poularikas (ed), The Transforms and Applications Handbook, CRC Press, 2000 2. K. B. Howl, Fourier Transforms. http://dsp-book.narod.ru/TAH/ch02.pdf (Stand September 2012)

[7] I. Sneddon, The Use of Integral Transforms, McGraw-Hill, 1972

[8] R. Wulkenhaar, Lebesgue-Integral und L^p Räume, Seminar Integraltransformationen 2012, http://www.math.uni-muenster.de/u/raimar/lehre/ WS12/Integraltransformationen/ Lebesgue.pdf (Stand Oktober 2012)

[9] R. Wulkenhaar, Mathematik für Physiker, Vorlesungsskript WWU Münster, http://www.math.uni-muenster.de/u/raimar/lehre/WS10/Math-f-Phys-III/Math-f-Ph-3.pdf (Stand Oktober 2012)