Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 12/13**
Dr. T. Timmermann

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Ausnahmsweise bis Mi, 17.10.2010, in den Übungen Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{xy}{x - y}.$$

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_j f$ und $\partial_i \partial_j f$ für $i, j = 1, 2$.

(b) Zeigen Sie, dass $x^2 \partial_1^2 f(x, y) + 2xy\partial_1\partial_2 f(x, y) + y^2 \partial_2^2 f(x, y) = 0$.

Aufgabe 2. Sei $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für g im Punkt $(0, 0)$ jede Richtungsableitung existiert.

(b) Zeige Sie, dass g im Punkt $(0, 0)$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 3. Sei $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$h(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

Zeigen Sie, dass h total differenzierbar ist, und berechnen Sie die Jacobi-Matrix $(\partial_j h_i) \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ sowie deren Determinante.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ mit Hilfe der Abbildung $(a_{ij})_{i,j} \mapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$, $A \mapsto A^t A$, ist differenzierbar mit $(Df)(A)B = A^t B + B^t A$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(b) Die Matrix-Exponentialfunktion $\exp\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$, $A \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$, ist differenzierbar und für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}(D\exp)(A)B &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{(k + l + 1)!} A^k B A^l \\ &= \exp(A)B, \quad \text{falls } AB = BA.\end{aligned}$$

(*Hinweis:* Berechnen Sie für $g = f$ und $g = \exp$ jeweils $g(A+B)-g(A)$ und verwenden Sie die Supremums-Norm auf dem $M(n \times n, \mathbb{R})$, gegeben durch $\|(a_{ij})\|_\infty := \sup_{i,j} |a_{i,j}|$, sowie die Ungleichung $\|XY\|_\infty \leq \|X\|_\infty \|Y\|_\infty$ zur Abschätzung von Restgliedern.)