Prof. Dr. R. Wulkenhaar
Dr. T. Timmermann **WS 12/13**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 06.11.2012, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $0 < r < R$ und $T \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man von $(r+R,0,0)$ aus durch Nacheinanderausführung

- einer Drehung um die Achse $x = R, z = 0$ um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi[$ und
- einer Drehung um die z-Achse um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$

erreichen kann.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$, dass $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beschreiben Sie $(x,y,z) \in T$ als Funktionen von ϕ und θ.

(c) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Basis für den Tangentialraum an T an dem durch $\phi = \theta = \pi/4$ bestimmten Punkt.

Aufgabe 2. (a) Wir betrachten einen rechtwinkligen Quader mit den Seitenlängen $x, y, z > 0$. Bestimmen Sie Oberfläche und Volumen in Abhängigkeit der Seitenlägen, und zeigen Sie, dass bei konstanter Oberfläche das Volumen genau im Fall eines Würfels maximal wird.

(b) Wir betrachten ein Ellipsoid $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$ mit festen $a, b, c > 0$. Bestimmen Sie das maximale Volumen eines rechtwinkligen Quaders mit achsenparallelen Kanten, dessen Eckpunkte auf dem Ellipsoid liegen. (*Hinweis:* Schreiben Sie das Volumen als Funktion der Koordinaten (x,y,z) des Eckpunktes mit $x, y, z > 0$.)

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 1. Sei $f : M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch $A \mapsto A^T A - E_n$. Dann ist $O(n) = f^{-1}(0)$ die Gruppen der orthogonalen $n \times n$-Matrizen (vgl. Satz 48.5). Zeigen Sie:

(a) $(Df)(A)(BA) = A^t(B + B^t)A$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
(*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 4(a) von Blatt 1.)

(b) $\mathrm{rang}((Df)(A)) = n(n+1)/2$ für alle $A \in O(n)$.
(*Hinweis:* Zeigen und benutzen Sie, dass die Abbildung $C \mapsto A^t C A$ injektiv ist.)

(c) $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Dimension $n(n-1)/2$ und Kodimension $n(n+1)/2$.

(d) Für $\mathfrak{o}(n) := T_{E_n}(O(n))$ gilt $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X^t = -X\}$.

(*Bemerkung:* Ähnlich zeigt man, dass $U(n)$ und $SU(n)$ Untermannigfaltigkeiten von $M(n \times n, \mathbb{C})$ sind. Gruppen von Matrizen, die gleichzeitig Untermannigfaltigkeiten sind, spielen eine wichtige Rolle in der Physik.)

Aufgabe 4. Bestimmen Sie Koordinaten und Wert des Maximums und Minimums der Funktion $F(x, y, z) = x + y + z$ auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 4,\ x + y = 2\}$.