

Übung zu Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 04.12.2012, 12 Uhr in den Briefkästen

Blatt 8

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$, $x(0) = -1$, $x'(0) = -5$;

(b) $x''(t) + x'(t) + \frac{1}{4}x(t) = 0$, $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

(b) $x''(t) - x(t) = te^{2t}$, $x(0) = -4/9$, $x(1) = 0$.

Aufgabe 3. Eine Kette der Masse m hängt zum Zeitpunkt $t = 0$ über einem (glatten, unendlich dünnen) Rundholz c Meter auf der einen und $d > c$ Meter auf der anderen Seite herab und gleitet reibungsfrei infolge der Erdanziehung g herunter.

- (a) Stelle eine Differentialgleichung für die Länge $x(t)$ der Kette, die bis zum Zeitpunkt t über das Rundholz gegliedert ist, auf. (*Hinweis:* Verwende den Parameter $v := \sqrt{\frac{2g}{c+d}}$.)
- (b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.
- (c) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.
- (d) Zu welchem Zeitpunkt ist die Kette heruntergeglitten?

Aufgabe 4. Gegeben sei eine DGL der Form $x''(t) + ax'(t) + bx(t) = f(t)$. Seien $x_{(1)}, x_{(2)}$ zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL. Überführung in eine lineare DGL erster Ordnung für $c(t) = (x(t), x'(t))^t$ liefert die DGL

$$c'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} c(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungs-Fundamentalsystem $\Phi = \begin{pmatrix} x_{(1)} & x_{(2)} \\ x'_{(1)} & x'_{(2)} \end{pmatrix}$ der homogenen DGL.

- (a) Zeigen Sie: Eine Funktion $y: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ erfüllt $\Phi(t)y'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$ genau dann, wenn

$$y'_1(t) = -\frac{f(t)x_{(2)}(t)}{W(t)} \text{ und } y'_2(t) = \frac{f(t)x_{(1)}(t)}{W(t)},$$

wobei $W(t) = x_{(1)}(t)x'_{(2)}(t) - x'_{(1)}(t)x_{(2)}(t)$.

- (b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der DGL zweiter Ordnung $x''(t) + x(t) = 1/\cos t$ durch Überführung in eine DGL erster Ordnung und Variation der Konstanten. (*Hinweis:* Wählen Sie x_1, x_2 reell!)