Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 12/13**
Dr. T. Timmermann

Übung zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis 18.12.2012, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{res}_1 \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2} = 2e^2$, (b) $\operatorname{res}_0 \dfrac{z^2+2}{\sin z} = 2$, (c) $\operatorname{res}_0 \dfrac{z}{1-\cos z} = 2$,

(d) $\operatorname{res}_{z_k} \dfrac{1}{1+z^4} = -\dfrac{1}{4} z_k$, wobei z_k für $k = 1, \ldots, 4$ die Wurzeln von $1 + z^4$ seien.

(*Hinweis:* Benutzen Sie für (d) die Formel für Residuen von Quotienten und für (c) die Formel $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} (z-a)^k f(z)$ für Residuen an k-fachen Polen.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{\pi}{6}$, (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx\,\cos x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{e}$.

Aufgabe 3. Der Kotangens ist definiert als $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{res}_k \left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}\right) = \frac{1}{\pi k^2}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) $\operatorname{res}_0 \left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.
(*Hinweis:* Berechnen Sie die ersten Glieder der Laurent-Reihe von $\cot(\pi z)$ bei $z = 0$ mit Hilfe der Gleichung $\cot(\pi z)\sin(\pi z) = \cos(\pi z)$.)

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_N} dz \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = 2\pi i\left(-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^2}\right)$, wobei $N \in \mathbb{N}$ und γ_N die Kurve bezeichnet, die das achsenparallele Quadrat mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge $2N+1$ im positiven Drehsinn mit konstanter Geschwindigkeit 1 (d.h. $|\gamma_N'| \equiv 1$) durchläuft.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, wobei Sie die Relation $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} dz \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} = 0$ ohne Beweis (eine Kette von Standard-Abschätzungen) benutzen dürfen.

Aufgabe 4. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie (beide Teilaufgaben sind unabhängig voneinander):

(a) Für jedes $z \in U$ ist $|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{d^k} \sup_{\zeta \in U} |f(\zeta)|$, wobei $d := \inf_{w \in \mathbb{C}\setminus U} |w - z|$.

(b) (*Maximumprinzip*) Die Funktion $|f|$ besitzt keine lokalen Maxima in U. Ist $|f|$ stetig auf den Abschluss $\overline{U}$ fortsetzbar, so nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand $\partial U = \overline{U} \setminus U$ an, also $\sup_{z\in\overline{U}} |f(z)| = \sup_{z\in\partial U} |f(z)|$. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel.)