Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Zur Besprechung in den Übungen Blatt 0

Aufgabe 1. Sind folgende Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ injektiv/surjektiv? (Begründung oder Gegenbeispiel):

(a) $f : (x, y) \mapsto (y + 2, x - 1)$

(b) $f : (x, y) \mapsto (xy, x + y)$

(c) $(x, y) \mapsto (y^3 - y, x)$

(d) $(x, y) \mapsto (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, y + x)$

Aufgabe 2. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiele folgende Aussagen:

(a) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv.

(b) $g \circ f$ surjektiv $\Leftrightarrow$ g surjektiv und f surjektiv.

(c) $g \circ f$ surjektiv und g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv.

(d) $g \circ f$ injektiv und f surjektiv $\Rightarrow$ g injektiv.

Aufgabe 3. Von Leonardo Fibonacci stammt folgendes Modell zur Vermehrung von Kaninchen. Nimmt man an, dass Kaninchen unsterblich sind, stets in Paaren auftreten und jedes Paar in jedem Monat ein neues Kaninchenpaar zeugt, welches nach Ablauf zweier Monate selbst Nachwuchs bekommt, so genügt die Anzahl f_n der Kaninchenpaare im Monat n der Rekursionsgleichung

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Überzeugen Sie sich, daß das Kaninchenmodell auf diese Gleichung führt.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass im Fall $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

(d) $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \,, \qquad n \geq 1$