Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 31.10.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Es sei M eine endliche Menge aus $n \geq 1$ Elementen. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$ verschiedene injektive=surjektive=bijektive Abbildungen $f : M \to M$.
Bemerkung: Solche Selbstabbildungen nennt man *Permutationen*. Die Zahl der Permutationen entspricht der Menge der verschiedenen n-Tupel, die sich aus der n-elementigen Menge bilden lassen.

(b) Für $k \in \{0, \dots, n\}$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen von M.

(c) M besitzt 2^n verschiedene Teilmengen (einschließlich $\varnothing$ und M selbst).

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$ verschiedene Zerlegungen einer n-elementigen Menge in k Teilmengen, so daß die i-te Teilmenge $n_i \geq 0$ Elemente enthält. Dabei ist $n_1 + \cdots + n_k = n$.

(b) Es gibt $\binom{n+k-1}{k-1}$ verschiedende Zerlegungen von $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k \in \mathbb{N}$ als Summe von $k \geq 1$ natürlichen Zahlen $(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Aufgabe 3. Eine Untergruppe $H \subseteq G$ einer Gruppe $(G, *)$ heißt *Normalteiler*, falls für alle $g \in G$ und $h \in H$ gilt $g^{-1} * h * g \in H$.

(a) Zeigen Sie: Durch $g_1 \sim g_2 \quad \Leftrightarrow \quad g_2^{-1} * g_1 \in H$ wird eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

(b) Zeigen Sie: Die Quotientenmenge $G/H := G/\sim$ ist selbst wieder eine Gruppe, die *Quotientengruppe* (oder *Faktorgruppe*), mit Produkt $[g_1] * [g_2] := [g_1 * g_2]$.
Vorsicht: Diese Konstruktion funktioniert nur für Untergruppen, die Normalteiler sind! Hier muß gezeigt werden, daß für andere Repräsentanten $\tilde{g}_1 \sim g_1$ und $\tilde{g}_2 \sim g_2$ ebenfalls gilt $\tilde{g}_1 * \tilde{g}_2 \sim g_1 * g_2$.

(c) Zeigen Sie: Für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ist $m\mathbb{Z} := \{m \cdot a \ : \ a \in \mathbb{Z}\}$ (mit Verknüpfung $+$) eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$, und diese ist Normalteiler.
Bemerkung: Die zugehörige Quotientengruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ heißt *zyklische Gruppe der Ordnung* m. Die Elemente dieser Gruppe sind die Restklassen modulo m.

Aufgabe 4. Für $a, b \in \mathbb{R}_+^\times$ heißt

i) $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ das arithmetische Mittel,

ii) $G(a,b) := \sqrt{ab}$ das geometrische Mittel,

iii) $H(a,b) := \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ das harmonische Mittel.

Zeigen Sie: $H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b)$, mit Gleichheit nur für $a = b$.