Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 7.11.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 3

Aufgabe 1. Für $0 < a < b$ werden rekursiv Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ definiert durch

$$a_0 = a \;,\; b_0 = b \;, \qquad a_n = G(a_{n-1}, b_{n-1}) \;, \quad b_n = A(a_{n-1}, b_{n-1}) \;,$$

wobei $G(a,b) := \sqrt{ab}$ bzw. $A(a,b) := \frac{a+b}{2}$ das geometrische bzw. arithmetische Mittel sind.

Beweisen Sie: $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung.

Hinweis: Ein Teil des Beweises besteht darin, $0 < b_n - a_n < \frac{b}{2^n}$ zu zeigen.

Bemerkung: Die in allen Intervallen liegende reelle Zahl heißt das *arithmetisch-geometrische Mittel* von a, b.

Aufgabe 2. Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen an:

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{5-12\mathrm{i}} \qquad\qquad \text{(b)}\quad \frac{5-2\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} \qquad\qquad \text{(c)}\quad \left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}\right)^n \;, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 3.

(a) Geben Sie sämtliche Lösungen folgender Gleichungen in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ an:

$$\text{i)}\quad z^2 = \mathrm{i} \qquad\qquad \text{ii)}\quad z^3 = -1$$

(b) Skizzieren Sie folgende Punktmengen der Gaußschen Zahlenebene:

i) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z-a| \leq r\}$ für $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+$, ii) $\{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| < |z+1| < 1\}$

Aufgabe 4. Die Normalform einer kubischen Gleichung ist

$$z^3 + pz + q = 0 \;, \qquad p, q \in \mathbb{R} \;.$$

(a) Rechnen Sie nach, daß für $D := \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ die Lösungen dieser kubischen Gleichung gegeben sind durch die Cardanischen Formeln

$$z_1 = u + v \;, \qquad z_2 = \zeta_1 u + \zeta_2 v \;, \qquad z_2 = \zeta_2 u + \zeta_1 v$$

mit $\zeta_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\zeta_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ und

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} \;, \qquad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} \;.$$

Dabei ist $\sqrt[3]{a} = -\sqrt[3]{-a}$ für $a < 0$.

(b) Man bestimme die Lösungen von $z^3 + 9z + 6 = 0$.