Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 21.11.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie: (v_1, v_2, v_3) ist Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ mit $w = \sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i$.

(c) Für welche $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_3)$?

Aufgabe 2. Sei $U = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbb{R}^4$ und $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{R}^4$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von $U, V, U+V, U \cap V$ sowie eine Basis von $U \cap V$.

Aufgabe 3. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ heißt *symmetrisch*, falls $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$, und *schief-symmetrisch*, falls $a_{ij} = -a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

(a) Zeigen Sie, daß alle symmetrischen bzw. alle schief-symmetrischen Matrizen je einen Untervektorraum von $M(n \times n, K)$ bilden, und bestimmen Sie dessen Dimension.

(b) Zeigen Sie, daß es für jede Matrix $A \in M(n \times n, K)$ genau eine symmetrische Matrix A_+ und eine schief-symmetrische Matrix A_- gibt mit $A = A_+ + A_-$.

Aufgabe 4. Begründen Sie, weshalb die unten angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ konvergent bzw. divergent sind, und bestimmen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert:

(a) $a_n = \dfrac{1}{(\sqrt[k]{2})^n} \dbinom{n}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}^\times$

(b) $b_n = \left(\dfrac{7 + 24\mathrm{i}}{25} \right)^n$

(c) $c_n = \sqrt[n]{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{n-k} 2^k}, \qquad x \in \mathbb{R}_+^\times$