Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 28.11.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. Berechnen Sie folgende Grenzwerte unter Verwendung von $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+a}-\sqrt{n}\right)\,,\qquad a>0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+1}\right)\,,\qquad a>0$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

Aufgabe 2. Für $x\in\mathbb{R}_+^\times$ und beliebiges $y\in\,]0,\frac{2}{x}[$ sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv definiert durch $a_0=y$ und $a_{n+1}=2a_n-xa_n^2$.

(a) Zeigen Sie: $a_n\in\,]0,\frac{1}{x}]$ für alle $n\in\mathbb{N}^\times$.

(b) Zeigen Sie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist monoton wachsend.

(c) Begründen Sie, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty}a_n$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie, daß für beliebiges $a_0>0$ die durch $a_{n+1}:=\sqrt{2+a_n}$ rekursiv definierte Folge konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie, daß 2 eine Schranke ist mit der Methode aus Aufgabe 1.

Aufgabe 4. (Beweis von $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{qn})^n=e^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{e^p}$ für $p,q\in\mathbb{Z},q\neq 0$) Zeigen Sie schrittweise:

(a) Die Folge $\left((1+\frac{r}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times,\,n>-r}$ ist für alle $r\in\mathbb{R}^\times$ monoton wachsend.

(b) Für $p,q\in\mathbb{N}^\times$ sind $\left((1+\frac{p}{qn})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ und $\left((1-\frac{p}{qn})^n\right)_{n\in\mathbb{N}^\times,\,qn>p}$ beschränkt.

(c) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{p}{qn})^n=\sqrt[q]{e^p}$ für $p,q\in\mathbb{N}^\times$. *Hinweis:* Teilfolgen

(d) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{p}{qn})^n=\frac{1}{\sqrt[q]{e^p}}$ für $p,q\in\mathbb{N}^\times$.