Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 5.12.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Begründen Sie, weshalb folgende Reihen konvergieren bzw. divergieren:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+10)!}{n^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt{n^2+n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+10}\cdot(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n^2}$

Aufgabe 2. Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\sqrt{1+x^2})^n}\,, \qquad x\in\mathbb{R}$ (*Vorsicht*: die Reihe beginnt mit 1)

(b) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \Big(1-\frac{1}{k}\Big)^n\,, \qquad k\in\mathbb{N}^\times$

(c) Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{3-4\mathrm{i}}{7}\Big)^n$

(d) die rationale Zahl $\frac{p}{q}$, mit $p,q\in\mathbb{N}^\times$ teilerfremd, welche dem periodischen Dezimalbruch $0,\overline{615384}$ entspricht. *Hinweis*: $999999=3^3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$

Aufgabe 3. (a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweisen Sie folgendes *Verdichtungskriterium*: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

(b) Beweisen Sie mittels (a), daß $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, mit $s\in\mathbb{Q}$, genau für $s>1$ konvergiert und für $s\leq 1$ divergiert.

Aufgabe 4. (a) Seien $a_n,b_n\in\mathbb{C}$. Beweisen Sie:
Falls $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|^2$ konvergieren, so konvergiert auch $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$.

(b) Berechnen Sie folgende Reihen durch geschicktes Ergänzen zur Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$