**Prof. Dr. R. Wulkenhaar** **WS 13/14**

## Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 19.12.2013 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 9

---

**Aufgabe 1.** Es sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ euklidischer Vektorraum, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ und $v, w \in V$. Zeigen Sie:

(a) $\|v\| = \|w\| \iff \langle v - w, v + w\rangle = 0.$

(b) $\|v - w\| = \|v + w\| \iff \langle v, w\rangle = 0.$

(c) $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \iff \langle v, w\rangle = 0.$

(d) Für $w \neq v$ gilt: $\left\| v - 2\dfrac{\|v\|^2}{\|v-w\|^2}(v-w)\right\| = \|v\| \iff \langle v, w\rangle = 0.$

**Aufgabe 2.** Welche der folgenden Abbildungen $N_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ definiert eine Norm? (Begründung erforderlich)

(a) $N_1((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2}\ ,$

(b) $N_2((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{|x_1 - 2x_2| + |x_2 - 2x_3| + |x_3 - 2x_1|}\ ,$

(c) $N_3((x_1, x_2, x_3)) = \sqrt{(x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + (x_3 - 2x_1)^2}\ ,$

(d) $N_4((x_1, x_2, x_3)) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|} + \sqrt{|x_3|}\right)^2$

**Aufgabe 3.** Es sei $X$ eine nichtleere Menge und

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in X.$$

(a) Zeigen Sie: $d$ definiert einen Abstand auf $X$.

(b) Beschreiben Sie die offenen Kugeln $K_\epsilon(x)$ in $(X, d)$. Welche Teilmengen von $(X, d)$ sind offen, welche abgeschlossen?

(c) Wann konvergiert eine Folge in $(X, d)$?

**Aufgabe 4.** (a) Es sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $x, y \in X$. Zeigen Sie:

$$d'(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + d(x, y)}$$

definiert einen weiteren Abstand auf $X$.

*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, daß für $a, b \geq 0$ gilt $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} - \dfrac{1}{1+a+b} \leq 1.$

b.w.

(b) Geben Sie eine Familie $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Intervalle $J_n \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß $\bigcap_{i=0}^{\infty} J_n = [0,1]$ abgeschlossen ist.
Geben Sie eine Familie $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $I_n \subseteq \mathbb{R}$ an, so daß $\bigcup_{i=0}^{\infty} I_n = ]0,1[$ offen ist.
*Hinweis:* Die Beispiele zeigen, daß Durchschnitte beliebig vieler offener Mengen nicht offen und Vereinigungen beliebig vieler abgeschlossener Mengen nicht abgeschlossen sein müssen.