Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 13/14**

Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 16.01.2014 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 10

Aufgabe 1. Bestimmen Sie zu $\epsilon = \frac{1}{2014}$ ein $\delta > 0$ (mit Begründung!), so daß

(a) $\left|\dfrac{1}{x^2-3x+3} - 1\right| < \epsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < \delta$

(b) $f(K_\delta((0,0))) \subseteq K_\epsilon(f((0,0)))$ für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f((x,y)) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie: Es gibt ein $x \in [0,1]$ mit $\exp(-x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

(b) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $\zeta \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(\zeta) = f(\zeta + \frac{1}{2})$.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie, ob folgende Funktionsgrenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}\,, \quad p, q \in \mathbb{N}^\times$

(b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp\big((1+x)^3\big) - \exp(1+3x)}{x^2}$

(d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1}{x+1}\left(\dfrac{3}{x^2+5} + \dfrac{x}{x^2+1}\right)$

Aufgabe 4. (a) Es sei $a \in \mathbb{R}_+^\times \setminus \{1\}$. Zeigen Sie: Die durch $f(x) = a^x$ definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$ besitzt eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+^\times \to \mathbb{R}$. Diese sei mit $f^{-1}(y) =: \log_a y$ bezeichnet. Zeigen Sie: $\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$.

(b) Beweisen Sie: Für alle $x \in \,]-1,1[$ gilt $\ln \dfrac{1+x}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^\infty \frac{2x^{2k+1}}{2k+1}$.

(c) Zeigen Sie:

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^\infty \frac{2}{3(2k+1)9^k}\,, \qquad \ln 3 = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{2}{3(2k+1)9^k} + \frac{2}{5(2k+1)25^k}\right),$$
$$\ln 5 = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{4}{3(2k+1)9^k} + \frac{2}{9(2k+1)81^k}\right).$$