Übungen zu Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 23.01.2014 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie: Für alle $\varphi \in [0,\pi]$, $z \in \mathbb{R}$, $t \in]-1,1[$ und $x,y \in \mathbb{R}$ mit $xy < 1$ gilt

$$\text{(a)} \qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\;, \qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}\;,$$

$$\text{(b)} \qquad \operatorname{arsinh} z = \ln\Big(z + \sqrt{1+z^2}\Big)\;, \qquad \operatorname{artanh} t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\;,$$

$$\text{(c)} \qquad \arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\;.$$

(d) Zeigen Sie: $4\arctan\frac{1}{5} = \arctan\frac{120}{119} = \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{1}{239}$.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie: Für $x,y \in \mathbb{R}$ mit $y \notin 2\pi\mathbb{Z}$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(x+ky) = \sin\Big(x + \frac{n-1}{2}y\Big)\frac{\sin\frac{ny}{2}}{\sin\frac{y}{2}}\;.$$

(b) Schlußfolgern Sie durch geeignete Wahl von x,y:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n} = \cot\frac{\pi}{2n}\;, \qquad n \in \mathbb{N}^\times\;,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)x) = \frac{\sin^2(nx)}{\sin x}\;, \qquad x \notin \pi\mathbb{Z}\;,$$

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}}\cos(n\tfrac{x}{2})\;, \qquad x \notin 2\pi\mathbb{Z}\;.$$

Aufgabe 3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren *Tschebyschew-Polynome* T_n und U_n vom Grad n, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(nx) = T_n(\cos x)\;, \qquad \sin(nx) = \sin x \cdot U_{n-1}(\cos x)\;.$$

(a) Zeigen Sie: Für $n \geq 1$ gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} T_{n+1}(y) &= 2yT_n(y) - T_{n-1}(y)\;, \qquad T_0(y) = 1\;,\; T_1(y) = y\;,\\ U_{n+1}(y) &= 2yU_n(y) - U_{n-1}(y)\;, \qquad U_0(y) = 1\;,\; U_1(y) = 2y\;. \end{aligned}$$

(b) Geben Sie $\sin(4x)$ und $\cos(4x)$ in dieser Form an.

b.w.

Aufgabe 4. (a) Formulieren Sie einen Beweis von Lemma 15.15 der Vorlesung mittels Methoden für stetige Abbildungen, d.h.
Für eine beliebige Norm $\| \ \|$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *gibt es ein* $a \in S^{n-1}$ *mit* $\|a\| = \inf_{y \in S^{n-1}} \|y\|$. *Dabei ist* $S^{n-1} := \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ \|y\|_2 = 1\}$.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nehme jeden ihrer Funktionswerte genau zweimal an. Zeigen Sie: f ist nicht stetig.

Hinweis: Es werden Extremwertsatz und Zwischenwertsatz benötigt.