

# Konstruktive Renormierung

## 1 Vorbemerkungen

In renormierbaren Quantenfeldtheorien kann jedem Feynman-Graphen eine (durch Wahl der Normierungsbedingungen) eindeutig bestimmte endliche Funktion der äußeren Impulse zugeordnet werden. Die Zusammenfassung dieser Graphen zu perturbativen Korrelationsfunktionen zeigt z.T. grandiose Übereinstimmung mit dem Experiment. Dennoch ist klar, daß diese Störungsreihe den Konvergenzradius Null hat. Nehmen wir das folgende Integral als Analogon des 0-dimensionalen  $\phi^4$ -Modells:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 - \lambda x^4} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k x^{4k}}{k!} e^{-x^2}$$

“=”  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \int_0^{\infty} 2x dx x^{2(2k+\frac{1}{2}-1)} e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(2k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + 1)} . \quad (1.1)$

Die Reihe divergiert für jedes  $\lambda \neq 0$ . Selbstverständlich konvergiert das Ausgangsintegral für jedes  $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ ; der Wert kann sogar geschlossen angegeben werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 - \lambda x^4} = \frac{e^{\frac{1}{8\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}} K_{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{8\lambda} \right) . \quad (1.2)$$

Wie zu erwarten ist die Besselfunktion holomorph in einem Gebiet, das  $\lambda = 0$  als Randpunkt hat. Solche Situationen werden durch die Borel-Transformation und das Nevanlinna-Sokal-Theorem erfaßt.

**Theorem 1.1 (Nevanlinna 1919, Sokal 1980)** *Sei  $f(z)$  holomorph in der Scheibe  $C_R := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(\frac{1}{z}) > \frac{1}{R}\}$  und besitze in  $z = 0$  die Taylor-Entwicklung  $f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k + R_n(z)$  mit Schranke  $|R_n(z)| \leq C \sigma^n n! |z|^n$  gleichmäßig in  $n$  und  $z \in C_R$ . Dann ist  $f$  Borel-summierbar, d.h. die Borel-Transformierte  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} t^k$  konvergiert absolut für  $|t| < \frac{1}{\sigma}$  gegen eine im Streifen  $S_{\sigma} = \{t \in \mathbb{C} : \text{dist}(t, \mathbb{R}_+) < \frac{1}{\sigma}\}$  holomorphe Funktion  $B(t)$ . Diese genügt der Abschätzung  $|B(t)| < C' e^{\frac{t}{R}}$  und erlaubt die Rekonstruktion von  $f$  in  $C_R$  durch das absolut konvergente Integral*

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} dt e^{-\frac{t}{z}} B(t) .$$

Man hofft, daß zumindest für gewisse Quantenfeldtheorien die (sinnvoll!) renormierte Störungsreihe Borel-summierbar gemacht werden kann und so einen eindeutigen Wert an der physikalischen Kopplungskonstante liefert. Die konstruktive Quantenfeldtheorie entwickelt Methoden, um diesen Ziel näherzukommen. Zwei große Schwierigkeiten wurden identifiziert:

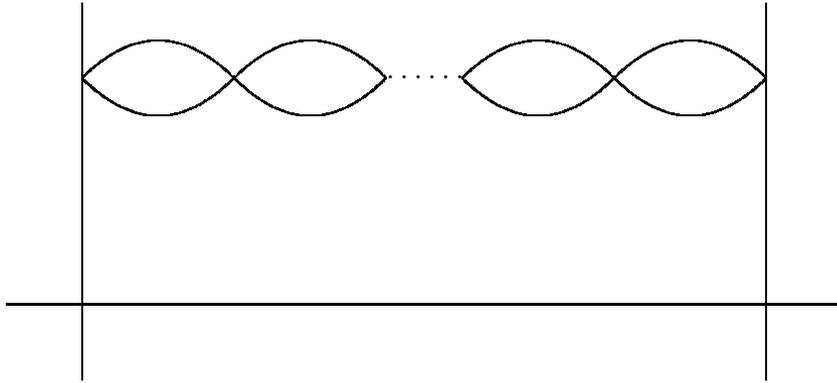
- i) Es gibt renormierte Graphen mit Amplituden, die bereits mit  $n!$  wachsen.
- ii) Die Anzahl aller Graphen wächst viel schneller als  $n!$ , so daß selbst idealste Abschätzungen der Amplituden durch  $K^n$  zu keiner verallgemeinerten Summierbarkeit führen.

## 2 Das Renormalon-Problem

Im Euklidischen  $\phi_4^4$ -Modell wird dem Graphen  die renormierte Amplitude (bis auf Vorfaktoren)

$$\int d^4k \left( \frac{1}{(k^2 + m^2)((p+k)^2 + m^2)} - \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \right) \sim \log \frac{p^2 + m^2}{m^2} \quad (2.1)$$

zugeordnet. Setzt man  $n$  dieser Graphen als Kette von Untergraphen in einen (hier konvergenten) globalen Graphen ein,



so entstehen Integrale der Art

$$\int \frac{d^4p}{((p+q_1)^2 + m^2)((p+q_2)^2 + m^2)((p+q_3)^2 + m^2)} \left( \log \frac{p^2}{m^2} \right)^n .$$

Diese verhalten sich ( $q_i = 0$  gesetzt und  $p^2 = m^2 x$  substituiert,  $n$  gerade) wie  $m^{-2} \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2} (\log x)^n > m^{-2} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} (\log x)^n = m^{-2} \cdot n!$ . Für  $\phi_4^4$  sind die (hier ignorierten) Vorzeichen derart, daß nicht einmal Borel-Summation möglich ist (was eng mit der Trivialität zusammenhängt).

Dieses Wachstum mit  $n!$  wird durch die Renormierung erst hervorgerufen, genauer gesagt durch die Lokalität des Subtraktionsterms. Die konstruktive Renormierung vermeidet die Renormalons durch Aufgabe der Lokalität. Sie wird ersetzt durch einen Renormierungsgruppenfluß effektiver Kopplungen. Diese Energieabhängigkeit der Kopplungskonstante ist auch aus experimenteller Sicht nicht abwegig. Ob sich damit auch die Axiome erfüllen lassen, ist in 4 Dimensionen nicht bekannt.

### 3 Die parametrische Darstellung

Ein Graph besteht aus  $n$  Vertices und  $L$  Kanten, welche je zwei Vertices miteinander verbinden. Diese Verbindung wird durch eine Inzidenzmatrix  $\mathcal{E} \in M(L \times n, \mathbb{Z})$  beschrieben, mit Einträgen  $-1, 0, +1$ , wobei in jeder Zeile entweder nur  $0$  (Tadpole) oder genau einmal  $-1$ , genau einmal  $+1$  und sonst  $0$  vorkommt. Ein Baum ist ein zusammenhängender und einfach zusammenhängender Graph; es folgt  $L = n - 1$ . Ein Wald ist eine Menge von Bäumen; hier ist  $L = n - B$ , falls der Wald aus  $B$  Bäumen besteht. Nach einem Theorem von Cayley gibt es genau  $n^{n-2}$  verschiedene Bäume mit  $n$  nummerierten Vertices. Wegen  $n^{n-2} \sim e^n n!$  ist das Ziel eine Reorganisation der Störungsreihe nur nach Bäumen und nicht nach allgemeinen Graphen.

Die Feynman-Regeln ordnen jeder Kante  $\ell$  mit Impuls  $k_\ell$  den Faktor

$$\frac{1}{k_\ell^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha_\ell e^{-\alpha_\ell(m^2 + k_\ell^2)}$$

zu und jedem Vertex  $\nu$  die Impulserhaltung

$$\delta\left(p_\nu + \sum_\ell \mathcal{E}_{\ell\nu} k_\ell\right) = (2\pi)^D \int_{\mathbb{R}^D} dy_\nu e^{i(p_\nu + \sum_\ell \mathcal{E}_{\ell\nu} k_\ell, y_\nu)}.$$

Dabei ist  $p_\nu$  der äußere Impuls am Vertex  $\nu$ . Zuletzt ist über alle Kantenimpulse  $k_\ell \in \mathbb{R}^D$  zu integrieren. Man tauscht formal die Reihenfolge, nun beginnend mit

$$\int_{\mathbb{R}^D} dk_\ell e^{-\alpha_\ell k_\ell^2 + \sum_\nu i \mathcal{E}_{\ell\nu} \langle k_\ell, y_\nu \rangle} = \left(\frac{\pi}{\alpha_\ell}\right)^{\frac{D}{2}} e^{-\|\sum_\nu \mathcal{E}_{\ell\nu} y_\nu\|^2 / (4\alpha_\ell)}$$

Eine der  $y$ -Integrationen liefert die Impulserhaltung, die verbleibenden sind Gaußsche Integrale, in den die  $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix  $\sum_\ell (\mathcal{E}^t)_{\nu'\ell} \frac{1}{\alpha_\ell} \mathcal{E}_{\ell\nu}$ , mit  $1 \leq \nu, \nu' \leq n-1$  eingeht. Im Ergebnis einer komplizierteren Analyse findet man die parametrische Darstellung der unrenormierten Amplitude eines Feynman-Graphen

$$\mathcal{A}_G(\{p_\nu\}) = \delta\left(\sum_\nu p_\nu\right) \int_{(\mathbb{R}_+)^L} d(\alpha_1, \dots, \alpha_L) \frac{e^{-m^2(\alpha_1 + \dots + \alpha_L) - \frac{V_G(\alpha_\ell, p_\nu)}{U_G(\alpha_\ell)}}}{(U_G(\alpha_\ell))^{\frac{D}{2}}}, \quad (3.1)$$

$$U_G(\alpha_\ell) = \sum_{T_1 \in G} \prod_{\ell \notin T_1} \alpha_\ell, \quad (3.2)$$

$$V_G(\alpha_\ell) = \sum_{T_2 \in G} \left( \prod_{\ell \notin T_2} \alpha_\ell \right) \left\| \sum_{\nu \in T_{21}} p_\nu \right\|^2. \quad (3.3)$$

Die erste Summe über  $T_1$  läuft über alle Spannbäume (spanning trees) von  $G$ , welche sämtliche Vertices enthalten. Die zweite Summe über  $T_2$  läuft über alle Wälder aus genau zwei Bäumen  $T_{21}, T_{22}$ , welche zusammen sämtliche Vertices

enthalten und dabei zumindest je einen Vertex mit äußeren Impulsen enthalten. Nach Fourier-Transformation in allen  $N$  äußeren Impulsen erhält man einen Beitrag zur Schwinger-Funktion. Für die Auswertung der verbliebenen  $\alpha_\ell$ -Integrale zerlegt man das Integrationsgebiet in Hepp-Sektoren  $\alpha_{\pi(1)} < \dots < \alpha_{\pi(L)}$ . Divergenzen entstehen bei  $p_\nu = 0$  durch die Nullstellen des ersten Symanzik-Polynoms  $U_G$ . Die Untersuchung dieser Nullstellenmenge liefert tiefe Zusammenhänge zwischen QFT und algebraischer Geometrie.

## 4 Multiskalen-Zerlegung

Der Propagator im Ortsraum

$$C(x, y) := \int_{\mathbb{R}^D} \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{e^{i\langle k, x-y \rangle}}{k^2 + m^2} = \int_0^\infty \frac{d\alpha}{(4\pi\alpha)^{\frac{D}{2}}} e^{-\alpha m^2 - \frac{\|x-y\|^2}{4\alpha}},$$

ist die *Kovarianz* des Gaußschen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $d\mu_C(\phi)$  für die Zustandssumme des freien Feldes  $\phi$ . Die Kovarianz wird zerlegt in  $C(x, y) = \sum_{i=0}^\infty C^i(x, y)$  mit  $C^0(x, y) = \int_1^\infty \frac{d\alpha}{(4\pi\alpha)^{\frac{D}{2}}} e^{-\alpha m^2 - \frac{\|x-y\|^2}{4\alpha}}$  und  $C^i(x, y) = \int_{M^{-2i}}^{M^{-2(i-1)}} \frac{d\alpha}{(4\pi\alpha)^{\frac{D}{2}}} e^{-\alpha m^2 - \frac{\|x-y\|^2}{4\alpha}}$ . Die Summe wird zu  $\sum_{i=0}^\rho$  regularisiert. Es gelten Abschätzungen der Art  $C^i(x, y) \leq KM^{(d-2)i} e^{-\delta M^i |x-y|}$ . Zu den wichtigsten Eigenschaften Gaußscher Maße gehört, daß eine Zerlegung der Kovarianz  $C = C_1 + C_2$  eine Zerlegung  $\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)$  derart induziert, daß das Maß faktorisiert in

$$d\mu_C(\phi) = d\mu_{C_1}(\phi_1) d\mu_{C_2}(\phi_2).$$

Entsprechend faktorisiert die gesamte (regularisierte) Zustandssumme in

$$\mathcal{Z} = \int \left( \prod_{i=0}^\rho d\mu_{C^i}(\phi^i) \right) e^{-S_{int}(\phi^0 + \phi^1 + \dots + \phi^\rho)},$$

wobei im Exponenten nur der Wechselwirkungsanteil  $S_{int}$  verbleibt; der bilineare Teil der Wirkung bildet das Gaußsche Maß. Man überlegt sich, daß sich Korrelationsfunktionen zerlegen in

$$S_N(x_1, \dots, x_N) = \sum_{G_N} \sum_{\mu \in \mathbb{N}^{L(G_N)}} \mathcal{A}_{G_N, \mu}(x_1, \dots, x_N)$$

Dabei durchläuft  $G_N$  die Menge aller Graphen mit äußeren Punkten  $x_1, \dots, x_N$  und  $L(G_M)$  Kanten, und  $\mu$  durchläuft alle Zuordnungen  $\mu = (i_1, \dots, i_{L(N)})$  einer natürlichen Zahl (später  $\leq \rho$ ) zu jeder Kante. Zu gegebener Skalenzuordnung  $\mu$  definiert jede natürliche Zahl  $0 \leq r \leq \rho$  einen Teilgraphen  $G_N(\mu, r)$ , der aus allen Kanten  $\ell$  besteht, für die  $i_\ell \geq r$  ist, sowie den angehefteten Vertices. Die offensichtliche Inklusion  $G_N(\mu, \rho) \subseteq G_N(\mu, \rho - 1) \subseteq \dots \subseteq G_N(\mu, 1) \subseteq G_N(\mu, 0)$

beschreibt einen (Galavotti-Nicoló-) Baum, dessen Knoten in der Ebene  $r$  die Zusammenhangskomponenten von  $G_N(\mu, r)$  sind.

Diese Knoten erscheinen aus Sicht einer tieferen Ebene  $s < r$  als *räumlich lokal*. Die zentrale Idee besteht nun darin, im Renormierungsprozeß nur diese tatsächliche Divergenz zu subtrahieren, also die Skalenzerlegung der Subtraktionsterme auf  $r \geq s$  zu beschränken. Diese heißen *sinnvolle Subtraktionen* und liefern die effektiven Kopplungen. Der gesamte Subtraktionsterm, der eine lokale Wechselwirkung beschreibt, enthält zusätzlich die *sinnlosen Subtraktionen*. Diese beseitigen keine Divergenz, mehr noch, sie erzeugen das Renormalon-Problem. Zusammenfassend:

$$\begin{aligned} \text{effektive Kopplung} &= \text{nackte Kopplung} - \text{sinnvolle Subtaktion} \\ \text{renormierte Kopplung} &= \text{nackte Kopplung} - \text{gesamte Subtaktion} \\ &= \text{effektive Kopplung} - \text{sinnlose Subtaktion} \end{aligned}$$

Das Abhängigkeit der effektiven Kopplungen von der Skala  $s$  entspricht energie-abhängigen Kopplungskonstanten und verletzt damit die übliche Lokalisierbarkeit an die Wirkung. Zunächst scheint es, daß man mit den unendlich vielen effektiven Kopplungskonstanten  $\lambda^r$  jede Vorhersagbarkeit verliert. Das ist jedoch nicht so: Es gibt Gleichungen zwischen  $\lambda^r, \lambda^{r-1}$ , die im Limes  $M \rightarrow 1$  den Differentialgleichungen der  $\beta$ -Funktion entsprechen. Somit genügen endlich viele Anfangsbedingungen zur Festlegung aller  $\lambda^r$ .

## 5 Reorganisation der Störungsreihe

Die Schwinger  $N$ -Punktfunktion ist zunächst eine Summe über Amplituden von Feynman-Graphen  $G$ , d.h.  $\mathcal{S}_N = \sum_G A_G$ . Seien  $T \subset G$  die Spannbäume in  $G$ , dann führen wir Gewichtsfunktionen  $W(G, T)$  ein mit  $\sum_T W(G, T) = 1$ . Die offensichtliche Identität

$$\mathcal{S}_N = \sum_G A_G = \sum_{T \subset G} A_G W(G, T) = \sum_T A_T \quad \text{mit} \quad A_T = \sum_{G \supset T} W(G, T) A_G$$

erlaubt die Reorganisation der Störungsreihe nach Bäumen, falls eine handhabbare Darstellung der Gewichte gefunden wird.

Eine solche Darstellung findet sich im Umfeld der BKAR-Waldformel, dem zentralen Werkzeug der konstruktiven Renormierungstheorie. Sei  $F$  ein Wald und  $P_{i \leftrightarrow j}^F$  der (falls existent) eindeutige Pfad in  $F$  zwischen den Vertices  $i, j$ .

**Theorem 5.1** Sei  $\phi : \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \rightarrow \mathbb{C}$  eine genügend oft differenzierbare Funktion

von Variablen  $x_{ij}$  mit  $i < j$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(1, 1, \dots, 1) &= \sum_F \int_0^1 \left( \prod_{i \leftrightarrow j \in F} dw_{ij} \right) \left( \frac{\partial^{L(F)} \phi}{\prod_{i \leftrightarrow j \in F} \partial x_{ij}} \right) (v_{12}^F(w), v_{13}^F(w), \dots, v_{n-1,n}^F(w)), \\ v_{ij}^F(w) &= \begin{cases} \min\{w_{kl} : k \leftrightarrow l \in P_{i \leftrightarrow j}^F\} & \text{falls } P_{i \leftrightarrow j}^F \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die Summe läuft über alle Wälder  $F$  zwischen den numerierten Vertices  $1, \dots, n$ , einschließlich des leeren Waldes ohne jede Kante.

Diese Formel verallgemeinert den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Für  $n = 2$  Vertices gibt es genau zwei Wälder, den leeren Wald und den Baum  $1 \leftrightarrow 2$ . Entsprechend gilt

$$\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 dw_{12} \frac{\partial \phi}{\partial x_{12}}(w_{12}).$$

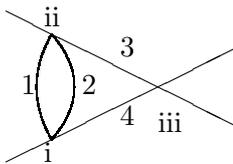
Schon für  $n = 3$  Vertices wird es kompliziert: Es gibt 7 Wälder, nämlich den leeren Wald und 6 Wälder aus je einem Baum: (12), (13), (23), (123), (231), (312). Es folgt für die Funktion  $\phi(x_{12}, x_{13}, x_{23})$

$$\begin{aligned} \phi(1, 1, 1) &= \phi(0, 0, 0) \\ &+ \int_0^1 dw_{12} \frac{\partial \phi}{\partial x_{12}}(w_{12}, 0, 0) + \int_0^1 dw_{13} \frac{\partial \phi}{\partial x_{13}}(0, w_{12}, 0) + \int_0^1 dw_{23} \frac{\partial \phi}{\partial x_{23}}(0, 0, w_{23}) \\ &+ \int_0^1 dw_{12} dw_{23} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{12} \partial x_{23}}(w_{12}, \min(w_{12}, w_{23}), w_{23}) + \int_0^1 dw_{13} dw_{23} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{13} \partial x_{23}}(\min(w_{13}, w_{23}), w_{13}, w_{23}) \\ &+ \int_0^1 dw_{12} dw_{13} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_{13} \partial x_{23}}(w_{12}, w_{13}, \min(w_{12}, w_{13})) \end{aligned}$$

Der Vorschlag für die Gewichtsfunktion ist nun:

$$W(G, T) = \int_0^1 \left( \prod_{\ell \in G} dw_{\ell} \right) \prod_{\ell' \notin T} v_{\ell'}^T(w) \quad (5.2)$$

Nach einem Theorem von Rivasseau-Wang [RW14a] stimmt  $W(G, T)$  mit dem Anteil der Hepp-Sektoren von  $G$  überein, welche den Spannbaum  $T$  haben. Daraus folgt  $\sum_T W(G, T) = 1$ . Ein Beispiel:



$$T \in \{(13), (14), (23), (24), (34)\}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
W(13) &= \int_0^1 d(w_1, \dots, w_4) w_1 \min(w_1, w_3) \\
&= \int_0^1 dw_1 \int_0^{w_1} dw_3 w_1 w_3 + \int_0^1 dw_1 \int_{w_1}^1 dw_3 w_1^2 = \frac{5}{24} \\
&= W(14) = W(23) = W(24) , \\
W(34) &= \int_0^1 d(w_1, \dots, w_4) (\min(w_3, w_4))^2 \\
&= \int_0^1 dw_3 \int_0^{w_3} dw_4 w_4^2 + \int_0^1 dw_3 \int_{w_3}^1 dw_4 w_3^2 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Der Logarithmus überführt die Summe über Wälder in eine Summe über Bäume. Entscheidend ist dann die folgende Positivitätseigenschaft:

**Theorem 5.2** *Definiere für jeden Spannbaum  $T$  in  $G$  die  $n \times n$ -Matrix  $X^T(\{w\})$ , abhängig von Zuordnungen von  $w_\ell \in [0, 1]$  zu jeder der  $n - 1$  Kanten in  $T$ , durch  $(X^T(\{w\}))_{ij} = v_{ij}^T$  für  $i \neq j$  und auf der Diagonalen  $(X^T(\{w\}))_{ii} = 1$ . Dann ist  $X^T(\{w\})$  positiv definit auf  $[0, 1]^{n-1}$  und positiv semidefinit auf  $[0, 1]^{n-1}$ .*

Im obigen Beispiel gilt

$$X^{(13)} = \begin{pmatrix} 1 & w_1 & \min(w_1, w_3) \\ w_1 & 1 & w_3 \\ \min(w_1, w_3) & w_3 & 1 \end{pmatrix} \quad X^{(34)} = \begin{pmatrix} 1 & \min(w_3, w_4) & w_4 \\ \min(w_3, w_4) & 1 & w_3 \\ w_4 & w_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit diesen Techniken kann für *regularisierte* fermionische Theorien sogar absolute Konvergenz von  $\sum_T A_T$  gezeigt werden, von der nach Renormierung und thermodynamischen und Kontinuumslimites noch Borel-Summierbarkeit verbleibt. In bosonischen Theorien geht das nicht. Der Ausweg bestand zunächst in einer Cluster-Entwicklung, die jedoch sehr kompliziert ist. Kürzlich wurde von Rivasseau et al eine sehr viel transparentere Methode ausgearbeitet. Hier ist der erste Schritt eine Hubbard-Stratonovich-Transformation der Wechselwirkung

$$e^{-\lambda \int dx \phi^4(x)} = C \int \mathcal{D}\sigma e^{-\int dx (\sigma^2(x) - 2i\sqrt{\lambda}\sigma(x)\phi^2(x))}$$

Anschließend wird  $\phi$  in der Zustandssumme ausintegriert, und im verbleibenden  $\sigma$ -Integral werden die obigen Gewichte eingesetzt. Die Positivität der Matrix  $X^T$ , sowie die Multiskalenentwicklung, spielt dann eine entscheidende Rolle im Beweis der Borel-Summierbarkeit [RW14b]. Die Methode ist besonders transparent in Matrixmodellen [GK14].

## Literatur

- [AR95] A. Abdesselam and V. Rivasseau, “Trees, forests and jungles: A botanical garden for cluster expansions,” *Lect. Notes Phys.* **446** (1995) 7 [hep-th/9409094], doi:10.1007/3-540-59190-7\_20.
- [GK14] R. Gurau and T. Krajewski, “Analyticity results for the cumulants in a random matrix model,” arXiv:1409.1705 [math-ph].
- [MR08] J. Magnen and V. Rivasseau, “Constructive  $\phi^4$  field theory without tears,” *Annales Henri Poincare* **9** (2008) 403–424 [arXiv:0706.2457 [math-ph]], doi:10.1007/s00023-008-0360-1
- [Nak71] N. Nakanishi, *Graph theory and Feynman integrals*, Gordon and Breach (1971), 223 pp.
- [Riv91] V. Rivasseau, *From perturbative to constructive renormalization*, Princeton Univ. Pr. (1991), 336 pp.
- [RW14a] V. Rivasseau and Z. Wang, “How to resum Feynman graphs,” *Annales Henri Poincare* **15** (2014) 11, 2069 [arXiv:1304.5913 [math-ph]], doi:10.1007/s00023-013-0299-8
- [RW14b] V. Rivasseau and Z. Wang, “Corrected loop vertex expansion for  $\Phi_2^4$  theory,” *J. Math. Phys.* **56** (2015) 6, 062301 [arXiv:1406.7428 [math-ph]], doi:10.1063/1.4922116