Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 15/16

Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an einer der Klausuren am 6.2.2016 bzw. 18.3.2016 sind Anmeldungen im Kursbuchungssystem erforderlich. Letzer Termin für die Anmeldung zur 1. Klausur ist der 4.2.2016. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2013/14.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Nach gegenwärtiger Planung wird die Probeklausur in der Vorlesung am 4.2.2016 vorgerechnet.

Aufgabe 1. (a) Beweisen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1}{8}(3^{2n} + 7) \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie: $\cos^3 x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 + 9^n}{4} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$.

Hinweis: Bestimmen Sie $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $\cos(3x) = c_1 \cos^3 x + c_2 \cos x$.

Aufgabe 2. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -1+2t \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_s = \begin{pmatrix} 3 \\ s \\ 2s \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad W_t := \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) \; .$$

(a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(W_t)$ als Funktion von $t \in \mathbb{R}$.

(b) Für $t = 0$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{R}$, so daß $w_s \in W_0$. Bestimmen Sie diese Zahl s.

(c) Bestimmen Sie für $t = 0$ und $s \in \mathbb{R}$ aus (b) die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $w_s = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i$.

Aufgabe 3. Sei $a > 0$. Zeigen Sie: Für beliebiges $x_0 > 0$ konvergiert die durch $x_{n+1} := \frac{x_n^3 + 3ax_n}{3x_n^2 + a}$ rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sqrt{a}$.

Aufgabe 4. a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $P(z) := \sum_{n=1}^{\infty} (n+4)! \left(\frac{z}{n}\right)^n$.

b) Berechnen Sie: $\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3 - \mathrm{i}}{4 + 3\mathrm{i}} \right)^n \right)$.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(a) $$\lim_{x \nearrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1}$$

(b) $$\lim_{x \searrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos x}{2^x - 1}$$

Aufgabe 6. Nach dem Planckschen Strahlungsgesetz ist die spektrale Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers der Temperatur $T > 0$ bei der Wellenlänge $\lambda > 0$ gegeben durch

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \; , \qquad h, c, k > 0 \; .$$

(a) Zeigen Sie: Ist $I(\lambda)$ extremal im Punkt $\lambda_0 \in \,]0, \infty[$, so gilt $(5 - x_0)e^{x_0} = 5$ für $x_0 := \frac{hc}{kT\lambda_0}$.

(b) Zeigen Sie: Die Funktion $f(x) = (5 - x)e^x - 5$ hat genau eine Nullstelle $x_0 \in \,]0, \infty[$.

Bemerkung: Die Aufgabe beweist das *Wiensche Verschiebungsgesetz*: Die spektrale Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers ist maximal für $\lambda_0 T = \frac{hc}{kx_0}$.