Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 15/16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 5.11.2015, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. (a) Zeigen Sie, daß für jedes $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

(b) Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, daß $n^p - n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch p teilbar ist.

(*Hinweis:* Lösen Sie (b) mit Induktion und (a) besser ohne.)

Aufgabe 2. Bei “6 aus 49” werden aus den Zahlen von 1 bis 49 nacheinander (ohne Zurücklegen) 6 Zahlen gezogen.

(a) Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es, wenn man sich die Reihenfolge der gezogenen Zahlen merkt? Wieviele, wenn man sich die Reihenfolge, in der die 6 Zahlen gezogen wurden, nicht merkt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlickeit dafür, daß alle gezogenen Zahlen gerade sind?

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß 2 der gezogenen Zahlen gerade und 4 ungerade sind?

(d*) Nun werde jede gezogene Zahl vor dem Ziehen der nächsten Zahl zurückgelegt. Die Reihenfolge, in der die Zahlen gezogen werden, wird gemerkt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dann genau 5 verschiedene Zahlen gezogen werden?

Aufgabe 3. (a) Für alle $a, b > 0$ ist das *arithmetische, geometrische* beziehungsweise *harmonische Mittel* definiert durch

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}, \qquad G(a,b) := \sqrt{ab}, \qquad H(a,b) := \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{A(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})}.$$

Zeigen Sie, daß gilt:

$$H(a,b) \leq G(a,b) \leq A(a,b), \qquad H(a,b) = A(a,b) \Leftrightarrow a = b.$$

(b) Seien nun $0 < a < b$ fest. Wir definieren $a_1 := a$ und $b_1 := b$ sowie

$$a_{n+1} := H(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} := A(a_n, b_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G(a_n, b_n) = \sqrt{ab}\,, \quad a_n < a_{n+1} < \sqrt{ab} < b_{n+1} < b_n \quad \text{und} \quad |b_{n+1} - a_{n+1}| < \frac{1}{2}|b_n - a_n|\,.$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie für die folgenden Mengen jeweils das Supremum und Infimum sowie, falls vorhanden, Maximum und Minimum:

(a) $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \,:\, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$, (b) $\left\{2^{(-1)^n n} \,:\, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$.