Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 15/16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 26.11.2015, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. (a) Welche der folgenden Teilmengen $V_1, \dots, V_4$ des $\mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum?

$$V_1 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}, \quad V_2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + yz = 0\right\},$$
$$V_3 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 5\right\}, \quad V_4 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y - z = 0\right\}.$$

(b) Geben Sie ein Beispiel für 3 Untervektorräume U_1, U_2, U_3 des $\mathbb{R}^3$ an mit

$$U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{0\}, \qquad (U_1 + U_2) \cap U_3 = U_3.$$

Aufgabe 2. (a) Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^6$ zwei *verschiedene* 4-dimensionale Untervektorräume. Welche Werte kann dann $\dim(V \cap W)$ annehmen?

(b) Sei $U = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2) \subset \mathbb{R}^3$ und $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$. (*Hinweis:* Was sind $\dim(U), \dim(V), \dim(U+V)$?)

Aufgabe 3. Die *Tschebyscheff-Polynome* T_n und die *Hermite-Polynome* H_n sind bestimmt durch die Rekursionsgleichungen

$$T_0(x) = 1, \qquad T_1(x) = x \qquad \text{und} \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$
$$H_0(x) = 1, \qquad H_1(x) = 2x \qquad \text{und} \qquad H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

für alle $n \geq 1$. Bezeichne $P_n[x]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Polynome in x vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Polynome $(T_0, \dots, T_N)$ und die Polynome $(H_0, \dots, H_N)$ jeweils eine Basis von $P_N[x]$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms H_3 bezüglich der Basis $(T_0, \dots, T_3)$ von P_3 und die Koeffizienten des Polynoms T_3 bezüglich der Basis $(H_0, \dots, H_3)$.

Aufgabe 4. Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch (gegebenenfalls mit Rest):

$$\text{(a)} \quad \frac{x^4 + 3x^3 - 4x^2 + x}{x + 4}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{2x^4 - 17x^3 + 26x^2 - 13x + 2}{2x^2 - 3x + 1}.$$