Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 15/16**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 03.12.2015, 10 Uhr in den Briefkästen Blatt 6

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{z+2}{(z-3)(z-5)}$, also $A, B \in \mathbb{C}$ mit $\frac{z+2}{(z-3)(z-5)} = \frac{A}{z-3} + \frac{B}{z-5}$.

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(z-2\mathrm{i})^2(z+3\mathrm{i})}$.

Aufgabe 2. Prüfen Sie die Konvergenz folgender Folgen und bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert:

$$x_n = \frac{n+1}{n^3+5}, \qquad y_n = \frac{2n}{2^n}, \qquad z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad w_n = n\big(\sqrt{n^2+4} - n\big),$$

(*Hinweis:* Erweitern Sie z_n mit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, analog für w_n.)

Aufgabe 3. Die Folge $(x_n)_n$ sei rekursiv definiert durch

$$x_0 := 2, \qquad\qquad x_{n+1} := \frac{15 - 12x_n + 4x_n^2}{4} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie: Es gilt (a) $\frac{3}{2} \leq x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und (b) $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.
(*Hinweis zu (b):* Welche Gleichung muß der Grenzwert erfüllen?)

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß die Folge der endlichen Kettenbrüche

$$x_n := \underbrace{\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots\, 1 + \cfrac{1}{1}}}}}_{n \text{ Bruchstriche}}$$

gegen den *goldenen Schnitt* $\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ konvergiert, indem Sie die Gleichungen $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ und $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$ verwenden und induktiv $|x_{n+1} - \Phi| \leq \Phi^{-(n+2)}$ zeigen.