Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 15/16

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Abgabe bis Donnerstag, den 14.01.2016, 10 Uhr in den Briefkästen — Blatt 9

Aufgabe 1. Bezeichne $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, so daß die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ gerade $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ist. Wir betrachten ein Parallelogramm mit den (paarweise verschiedenen) Eckpunkten $0, a, b, a+b \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie:

(a) Das Parallelolgramm ist genau dann ein Rechteck (also $\langle a, b\rangle = 0$), wenn seine Diagonalen gleich lang sind.

(b) Das Parallelogramm ist genau dann ein Rhombus (d.h. alle vier Seiten sind gleich lang), wenn seine Diagonalen senkrecht aufeinander stehen (also $\langle a+b, a-b\rangle = 0$).

Wir betrachten nun ein ebenes Viereck mit den vier verschiedenen Eckpunkten $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ (im Uhrzeigersinn aufgelistet) und nehmen an, daß das Viereck ein Drachen ist, d.h. $\|a-b\|_2 = \|a-d\|_2$ und $\|c-b\|_2 = \|c-d\|_2$.

(c) Zeigen Sie, daß die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, also $\langle a-c, b-d\rangle = 0$ gilt.

Aufgabe 2. (a) Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ und

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, daß $a > 0$, $b = c$ und $ad - bc > 0$.

Hinweis: Berechnen Sie zum Beweis der letzten Ungleichung $\langle w, w\rangle$ für $w = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

(b) Seien $a, b, d \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $ad - b^2 > 0$ und sei $\langle\ ,\ \rangle \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $\langle x, y\rangle := x_1 a y_1 + x_1 b y_2 + x_2 b y_1 + x_2 d y_2$. Zeigen Sie, daß dann mit $w = (-b, a)$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle \lambda e_1 + \mu w | \lambda e_1 + \mu w\rangle \geq 0.$$

Folgern Sie, daß $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b.w.)

Aufgabe 3. (a) Zeigen Sie, daß durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

eine Metrik d auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Bestimmen Sie alle offenen und alle abgeschlossenen Teilmengen von $(\mathbb{R}^2, d)$.

(c) Prüfen Sie, ob die Identität auf $\mathbb{R}^2$ als Abbildung $(\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d_2)$ oder als Abbildung $(\mathbb{R}^2, d_2) \to (\mathbb{R}^2, d)$ stetig ist, wobei d_2 die euklidische Metrik (Beispiel 16.4 mit $p = 2$) bezeichne.

Aufgabe 4. Prüfen Sie, welche Mengen offen oder abgeschlossen sind:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < x^2\}$;

(c) $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$, falls jedes U_k offen ist;

(d*) $\{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \cos(1/x)) : 0 < x \leq \pi\}$.
Bemerkung: Sie dürfen verwenden, daß $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.