Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 15/16**

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Aufgaben zur Selbstkontrolle, keine Abgabe — Blatt 15/16

Aufgabe 1. Die Fibonacci-Zahlen sind rekursiv definiert durch $f_0 := 0$, $f_1 := 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(a) Zeigen Sie erneut (Blatt 1, Aufgabe 3c) durch vollständige Induktion:
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)\,.$$

(b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ für alle $n \geq 1$.

(c) Für $n \geq 1$ sei $g_n := \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$. Geben Sie g_1 und eine Rekursionsformel an, die g_{n+1} durch g_n ausdrückt. Folgern Sie: $\frac{3}{2} \leq g_n \leq 2$ für alle $n \geq 2$.

(d) Zeigen Sie unter Verwendung (b)+(c):
Es gibt Konstanten $C, M \in \mathbb{R}$ mit $M > 1$, so daß $\Big|\dfrac{g_{n+1}}{g_n} - 1\Big| \leq \dfrac{C}{M^n}$ für alle $n \geq 1$.

(e) Zeigen Sie mit (c)+(d): $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist Cauchy-Folge.
Bemerkung: $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist nicht monoton!

(f) Begründen Sie, daß $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} g_n$.

(g) Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R(P)$ der Potenzreihe $P(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$.

(h) Zeigen Sie: $P(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$ für $|z| < R(P)$.
Hinweis: Berechnen Sie $(1-z-z^2)P(z)$.

(i) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung $\dfrac{z}{1-z-z^2} = \dfrac{A}{1-az} + \dfrac{B}{1-bz}$, d.h. geben Sie a, b, A, B an.

(j) Schreiben Sie $\dfrac{A}{1-az}$ und $\dfrac{B}{1-bz}$ als geometrische Reihen und bestimmen Sie f_n durch Koeffizientenvergleich. Vergleichen Sie mit (a).

(k) Schlußfolgern Sie aus $P(z) = z\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(z+z^2)^n$ für $|z| < R(P)$ die Identität:
$$f_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-k-1}{k}.$$
Bemerkung: Es gilt $\dbinom{m}{k} = 0$ für $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k > m$.