Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 2016/17

Probeklausur zur Mathematik für Physiker III

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an der Klausur am 6.2.2017 sind erforderlich:
  - (1a) Eine Anmeldung im QISPOS zur Klausur (Modulabschlußprüfung).
  - (2a) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1736. Letzter Termin für die Anmeldung ist der 3.2.2017.
- Die Klausurergebnisse werden erst am Abend des 8.2.2017 vorliegen. Die Klausureinsicht ist entweder am 9.2.2017 zu einem der Übungstermine oder am 10.2.2017 als Ersatz für die Vorlesung.
- Zur Teilnahme an der 2. Klausur am 5.4.2017 sind erforderlich:
  - (1b) Eine Anmeldung im QISPOS zur 2. Klausur (Modulabschlußprüfung). Falls die 1. Klausur mitgeschrieben und nicht bestanden wurde, kann diese Anmeldung erst ab Eintrag der Ergebnisse der 1. Klausur erfolgen, also erst einige Tage nach Klausureinsicht.
  - (2b) Eine Anmeldung im Kursbuchungssystem unter id 1737. Letzter Termin für die Anmeldung ist der 3.4.2017.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2014/15.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Insbesondere sind Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Die Probeklausur wird voraussichtlich am 2.2.2017 ab 18h00 vorgerechnet. Der Hörsaal wird über die Internetseite bekanntgegeben.

Aufgabe 1. Auf dem offenen Quadrat $Q :=]-1,1[\times]-1,1[$ werde eine Funktion $F : Q \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x,y) := xy + \tan(y) - \sqrt{1+x^2}$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $y_0 \in]-1,1[$ mit $F(0,y_0) = 0$.

(b) Zeigen Sie: Für geeignete Wahl von $\epsilon > 0$ gibt es genau eine Lösung $y :]-\epsilon,\epsilon[\to \mathbb{R}$ der Gleichung $F(x,y(x)) = 0$ mit $y(0) = y_0$ aus (a).

(c) Berechnen Sie $y'(0)$ für die Lösung aus (b).

Aufgabe 2. Es sei $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2+y^2+z^2 = 1\}$ die Einheitssphäre und $f(x,y,z) := \frac{x}{2+y}$.

(a) Begründen Sie, daß die Funktion f auf S^2 ein Maximum und ein Minimum annimmt.

(b) Geben Sie alle Punkte von S^2 an, in denen f extremal ist, und bestimmen Sie die Funktionswerte von f in diesen Punkten.

Aufgabe 3. Durch $c(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t)$ werde eine differenzierbare Kurve $c : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definiert.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge $L(c)$. *Hinweis:* $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u$

(b) Berechnen Sie das Integral der Differentialform $\omega(x,y) = \frac{1}{2}(-ydx + xdy)$ längs c.

Aufgabe 4. Lösen Sie folgende Differentialgleichungen (gegebenenfalls in einer Umgebung ihrer Anfangsdaten):

(a) $x'(t) = \frac{\cos(x(t))}{1+2t}$ mit $x(0) = 0$. (*Hinweis:* $\frac{1}{u} = \frac{u}{u^2}$)

(b) $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 3t^2$ mit $x(0) = 1$ und $x'(0) = 4$.

Aufgabe 5. (a) In welchen Punkten $z \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $f(z) = \overline{z}^2 - 2|z|^2 + 4$ komplex differenzierbar, in welchen holomorph?

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{2\pi} dx \, \frac{1}{5+4\sin x}$.

Aufgabe 6 Eine zylindrische homogene Torte T (Durchmesser d, Höhe h, Dichte μ) werde durch ebene Schnitte senkrecht zur Deckfläche in 12 kongruente Tortenstücke geschnitten. Zwei benachbarte Stücke werde herausgenommen und verspeist, die anderen 10 Stücke verbleiben an ihrem Platz. Berechnen Sie für den verbleibenden Rest der Torte

(a) die Masse,

(b) das Trägheitsmoment bezüglich Rotation um die zentrale Achse der ursprünglichen Torte,

(c) den Abstand des Schwerpunktes zur Drehachse.