Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 16/17**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe bis Donnerstag, den 27.10.16, 12 Uhr in den Briefkästen Blatt 1

Aufgabe 1. Wir betrachten die Polarkoordinatentransformation

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \phi) \mapsto (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

(a) Geben Sie einen möglichst großen Bereich an, auf dem F injektiv ist.

(b) Geben Sie (explizit) eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ an mit

$$F(K) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ x \geq 0\right\}.$$

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $(DF)(r, \theta, \phi)$.

(d) Berechnen Sie die Determinante $\det((DF)(r, \theta, \phi))$.

Aufgabe 2. Seien $g_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3, g_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(u, v, w) := (v + w, u + w, u + v), \qquad g_2(t) := (\cos^2 t, \sin^2 t, t^2),$$
$$f(x, y, z) := z(x + y).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen Dg_1, Dg_2 und Df.

(b) Berechnen Sie die $D(f \circ g_1)$ und $D(f \circ g_2)$ *zunächst ohne Kettenregel.*

(c) Prüfen Sie, daß $D(f \circ g_1)(u, v, w) = (Df)(g_1(u, v, w)) \circ (Dg_1)(u, v, w)$ und $D(f \circ g_2)(t) = (Df)(g_2(t)) \circ (Dg_2)(t)$.

Aufgabe 3. (a) Sei $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \langle x, x\rangle$. Berechnen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $(D_y f)(x)$, folgern Sie, daß f total differenzierbar ist, und bestimmen Sie die totale Ableitung $(Df)(x)$ als lineare Abbildung. (*Hinweis:* Das Skalarprodukt ist nach Cauchy-Schwarz als Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ stetig.)

(b) Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, also $\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$ konstant. Zeigen Sie, daß dann die Beschleunigung $\gamma''(t)$ stets senkrecht zum Impulsvektor $\gamma'(t)$ steht.

Aufgabe 4. Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Schreiben wir die Funktion $t \mapsto \det(A + tB)$ als Polynom $t \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$, so ist $c_0 = \det(A)$, $c_n = \det(B)$ und

$$c_1 = \sum_{k=1}^{n} \det(D_k),$$

wobei D_k die Matrix bezeichnet, die man aus A erhält, wenn man die k-te Spalte durch die k-te Spalte von B ersetzt. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Multilinearität der Determinante bezüglich der Spalten. Versuchen Sie nicht unbedingt, die Lösung mit Formeln aufzuschreiben; eine saubere schriftliche Argumentation ist hier sinnvoller.)

(b) Folgern Sie, daß die Richtungsableitung $(D_B \det)(A)$ mit c_1 übereinstimmt.

(c) Bezeichne E_n die Einheitsmatrix und $\mathrm{Spur}(B)$ die Summe der Diagonaleinträge von B. Folgern Sie, daß $((D \det)(E_n)) \circ B = \mathrm{Spur}(B)$.