Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 16/17

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe bis Dienstag, den 15.11.2016, 14 Uhr in den Briefkästen — Blatt 4

Aufgabe 1. Sei $0 < r < R$ und $T \subseteq \mathbb{R}^3$ die Menge aller Punkte, die man von $(r+R, 0, 0)$ aus durch Nacheinanderausführung

- einer Drehung um die Achse $x = R, z = 0$ um einen Winkel $\theta \in [0, 2\pi)$ und
- einer Drehung um die z-Achse um einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi)$

erreichen kann.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 - r^2$, daß $T \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Beschreiben Sie $(x, y, z) \in T$ als Funktionen von ϕ und θ.

(c) Bestimmen Sie eine möglichst einfache Basis für den Tangentialraum an T an dem durch $\phi = \theta = \pi/4$ bestimmten Punkt.

Aufgabe 2. (a) Wir betrachten einen rechtwinkligen Quader mit den Seitenlängen $x, y, z > 0$. Bestimmen Sie Oberfläche und Volumen in Abhängigkeit der Seitenlägen, und zeigen Sie, daß bei konstanter Oberfläche das Volumen genau im Fall eines Würfels maximal wird.

(b) Wir betrachten ein Ellipsoid $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1\}$ mit festen $a, b, c > 0$. Bestimmen Sie das maximale Volumen eines rechtwinkligen Quaders mit achsenparallelen Kanten, dessen Eckpunkte auf dem Ellipsoid liegen.
(*Hinweis:* Schreiben Sie das Volumen als Funktion der Koordinaten (x, y, z) des Eckpunktes mit $x, y, z > 0$.)

Aufgabe 3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 1. Sei $f\colon M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch $A \mapsto A^T A - E_n$. Dann ist $O(n) = f^{-1}(0)$ die Gruppen der orthogonalen $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $(Df)(A)(BA) = A^t(B + B^t)A$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.
(*Hinweis:* Verwenden Sie die Gleichung $((Df)(A))(BA) = \frac{d}{dt} f(A + tBA)\big|_{t=0}$.)

(b) $\operatorname{rang}((Df)(A)) = n(n + 1)/2$ für alle $A \in O(n)$.
(*Hinweis:* Zeigen und benutzen Sie, daß die Abbildung $C \mapsto A^t CA$ injektiv ist.)

(c) $O(n)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $M(n \times n, \mathbb{R})$ mit Dimension $n(n-1)/2$ und Kodimension $n(n + 1)/2$.

(d) Für $\mathfrak{o}(n) := T_{E_n}(O(n))$ gilt $\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n \times n, \mathbb{R}) : X^t = -X\}$.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie Koordinaten und Wert des Maximums und Minimums der Funktion $F(x, y, z) = x+y+z$ auf der Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = 4,\ x+y = 2\}$.