Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 16/17**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 7.12.2016, 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 7

Aufgabe 1. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(t) - t \cdot y(t) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

mit dem Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Geben Sie die Folge $\{\binom{y_n}{y_n'}\}_{n\in\mathbb{N}}$ an, die in einem Intervall $[-\epsilon, \epsilon]$ gegen die Lösung konvergiert.

(b) Ermitteln Sie genügend viele ($n \leq 4$ oder $n \leq 5$ sollte reichen) Approximationen, so daß Sie die Lösungsreihe $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ erraten können. Auf den Induktionsbeweis kann verzichtet werden.

(c) Verwenden Sie $2 \cdot 5 \cdots (3n-1) = 3^n(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(n-\frac{1}{3}) = 3^n \frac{\Gamma(n+\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}$, um die Lösung für $t > 0$ auszudrücken in der Form $y(t) = f(t)\, I_p(g(t))$ mit geeigneten Funktionen f, g und $p \in \mathbb{R}$, wobei $I_p(r) := \frac{r^p}{2^p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{4^n \cdot n! \cdot \Gamma(p+n+1)}$ die modifizierte Bessel-Funktion ist.

Aufgabe 2. Sei $A(t) := \begin{pmatrix} 2 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem der DGL $x'(t) = A(t)x(t)$.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$ mit $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Für stetige Funktionen $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sei folgendes System von Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in I \subset \mathbb{R} \tag{1}$$

Eine Lösung $\binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ von (1) sei bekannt, und es gelte $y_1(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Um eine weitere Lösung x von (1) zu finden, wähle man eine skalare nichtkonstante Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ und setze $\binom{x_1(t)}{x_2(t)} = \phi(t) \cdot \binom{y_1(t)}{y_2(t)} + z(t)$ mit $z = \binom{0}{z_2}$. Zeigen Sie:

(a) Diese Funktion $x = \binom{x_1}{x_2}$ ist genau dann Lösung von (1), wenn

$$a_{12}z_2 - \phi' y_1 = 0 \quad \text{und} \quad z_2' = \Big(a_{22} - a_{12}\frac{y_2}{y_1}\Big) z_2\,. \tag{2}$$

(b) Ist (z_2, ϕ) eine Lösung von (2), so ist $\phi \cdot \binom{y_1}{y_2} + \binom{0}{z_2}$ eine Lösung von (1), und $\begin{pmatrix} y_1 & \phi y_1 \\ y_2 & \phi y_2 + z_2 \end{pmatrix}$ ist ein Lösungs-Fundamentalsystem.

Aufgabe 4. Eine Lösung der für $t > 0$ definierten DGL $x'(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & -t \\ \frac{1}{t^3} & -\frac{2}{t} \end{pmatrix} x(t)$ ist $y(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ (Nachrechnen!). Bestimmen Sie uner Verwendung von Aufgabe 3 ein Lösungs-Fundamentalsystem.