Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann

WS 16/17

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 14.12.2016, 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 8

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

(a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = e^t$

(b) $x'''(t) + 2x''(t) - 7x'(t) + 4x(t) = t$. (*Hinweis:* Errate eine Wurzel.)

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

(c) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1;$

(d) $x''(t) - x(t) = t\mathrm{e}^{2t};\ x(0) = -4/9;\ x(1) = 0.$

Aufgabe 2. Die Schwingungsdifferentialgleichung mit Reibung und periodischer äußerer Kraft lautet

$$x''(t) + 2rx'(t) + \omega^2 x(t) = b\cos(\Omega t), \qquad \omega, \Omega, r, b > 0$$

(a) Geben Sie ein reelles Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung an, in Abhängigkeit vom Vorzeichen von $\omega - r$.

(b) Lösen Sie die inhomogene Gleichung für $\omega > r > 0$.

(c) Die Lösung $\tilde{x}(t)$ der inhomogenen DGL kann auch in der Form $\tilde{x}(t) = A\cos(\Omega t + \delta)$ angegeben werden. Berechnen Sie Amplitude A und Phasenverschiebung δ.

Aufgabe 3. Eine Masse m wird von einem Punkt O aus mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben geschossen und erfährt bei ihrer Bewegung die Erdanziehung g und den zur Bewegungsgeschwindigkeit proportionalen Luftwiderstand K.

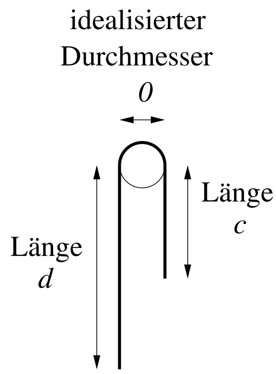
(a) Stelle eine Differentialgleichung für die Höhe $x(t)$ der Masse (über dem Punkt O) in Abhängigkeit von der Zeit t auf. (*Hinweis:* Benutze statt K die Größe $k := K/m$)

(b) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(c) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$.

(d) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Masse ihre maximale Höhe erreicht, sowie diese maximale Höhe.

Aufgabe 4. Eine Kette mit Masse m hängt zum Zeitpunkt $t = 0$ über einem glatten Rundholz (dessen Durchmesser wir vernachlässigen) auf der einen Seite die Länge c und auf der anderen Seite die Länge $d > c$ herab. Infolge der der Erdanziehung g setzt sich die Kette in Bewegung und wird zu einem Zeitpunkt $t_0 > 0$ heruntergeglitten sein.



(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Länge $x(t)$ der Kette, die bis zum Zeitpunkt t über das Rundholz geglitten ist, auf. (*Hinweis:* Verwenden Sie den Parameter $v := \sqrt{\frac{2g}{c+d}}$.)

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

(d) Zu welchem Zeitpunkt ist die Kette heruntergeglitten?