Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 16/17**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 11.01.2017, 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 10

Aufgabe 1. (a) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen die Funktion $f\colon z \mapsto |z|^4 - 2|z|^2$ komplex differenzierbar ist.

(b) Finden Sie eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x + \mathrm{i}y \mapsto u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$, mit $u(x,y) = x^2 - y^2 - x$. (Erraten erlaubt.)

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale (wie üblich mit $z = x+\mathrm{i}y$)

(a) $\int_\gamma \overline{z}\mathrm{d}z$ mit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}+1)t^2}$;

(b) $\int_\gamma (x^2 - \mathrm{i}y^2)\mathrm{d}z$ mit $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\gamma(t) = (t+1) + 2\mathrm{i}(t+1)^2$;

Aufgabe 3. Berechnen Sie mit der Cauchyschen Integralformel (und der daraus resultierenden Formel für die höheren Ableitungen) die Integrale

$$\text{(a)} \int_{\gamma_a} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz, \qquad \text{(b)} \int_{\gamma_b} \frac{\exp(z)}{(z-\pi\mathrm{i})^2 z} dz, \qquad \text{(c)} \int_{\gamma_c} \frac{\cos(2z)}{(z-2\mathrm{i})(z+3\mathrm{i})}\mathrm{d}z,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ definiert sind durch

$$\gamma_a(t) = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_b(t) = \pi\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \qquad \gamma_c(t) = 2\mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie für (a) die Funktion $f(z) = z^n$.)