Prof. Dr. R. Wulkenhaar
PD Dr. T. Timmermann **WS 16/17**

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 18.01.2017, 10 Uhr, in den Briefkästen — Blatt 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{res}_1 \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = 2e^2$;

(b) $\operatorname{res}_0 \frac{z^2+2}{\sin z} = 2$;

(c) $\operatorname{res}_0 \frac{z}{1-\cos z} = 2$. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Formel für Residuen an k-fachen Polen: $\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{(k-1)}}{dz^{k-1}} \lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$.)

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{\pi}{6}$.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{e}$.

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{\cos^4(t)+\sin^4(t)} = \pi\sqrt{8}$. (*Hinweis:* Satz 20.9.)

Aufgabe 4. Der Kotangens ist definiert als $\cot(z) := \cos(z)/\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{res}_k \left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}\right) = \frac{1}{\pi k^2}$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(b) $\operatorname{res}_0 \left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2}\right) = -\frac{\pi}{3}$.
(*Hinweis:* Berechnen Sie die ersten Glieder der Laurent-Reihe von $\cot(\pi z)$ bei $z=0$ mit Hilfe der Gleichung $\cot(\pi z)\sin(\pi z) = \cos(\pi z)$.)

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_N} dz \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} = 2\pi i\left(-\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n^2}\right)$, wobei $N \in \mathbb{N}$ und γ_N die Kurve bezeichnet, die das achsenparallele Quadrat mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge $2N+1$ im positiven Drehsinn mit konstanter Geschwindigkeit 1 (d.h. $|\gamma_N'| \equiv 1$) durchläuft.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, wobei Sie die Relation $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma_N} dz \frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2} = 0$ ohne Beweis (eine Kette von Standard-Abschätzungen) benutzen dürfen.