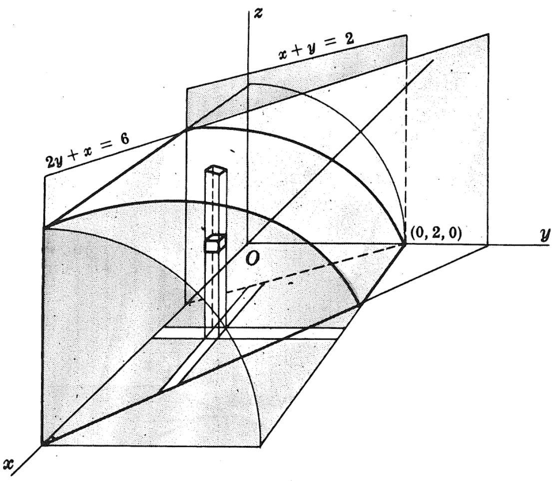
Prof. Dr. R. Wulkenhaar **WS 16/17**
PD Dr. T. Timmermann

Übungen zur Mathematik für Physiker III

Abgabe: Bis Mittwoch, den 25.01.2017, 10 Uhr, in den Briefkästen Blatt 12

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Masse des Körpers, der im ersten Oktanten durch die Ebenen $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ und den Zylinder $y^2 + z^2 = 4$ begrenzt wird, wenn die Dichte an der Stelle (x, y, z) gleich z ist. (*Hinweis:* Das ist einfacher, als es aussieht: Integrieren Sie in der Reihenfolge $\int dy \int dx \int dz$ mit geeigneten Grenzen.)



Aufgabe 2. Sei $R > r > 0$. Wir betrachten den Torus

$$T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\right\}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen des Torus.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $F\colon U \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $K \subseteq U$ kompakt. Dann ist der *Flächeninhalt* $A(F(K))$ der Fläche $F(K) \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$A(F(K)) = \int_K dx \det((DF)(x)^T (DF)(x))^{1/2}.$$

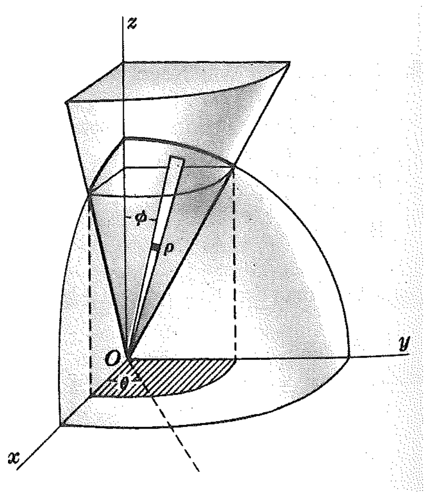
Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formel und der Parametrisierung

$$F\colon [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R - r\cos\psi)\cos\phi \\ (R - r\cos\psi)\sin\phi \\ r\sin\psi \end{pmatrix}$$

den Oberflächeninhalt des Torus.

b.w.

Aufgabe 3. Wir betrachten den Körper K, der von einem Viertel eines Kegels vom (für den gesamten Kegel halben) Öffnungswinkel 30° (siehe Bild; dort sind die Kugelkoordinaten (ρ, θ, ϕ) gegenüber (r, φ, ϑ) in der Vorlesung) durch die Kugel vom Radius $R = 2$ abgeschnitten wird, deren Mittelpunkt die Spitze des Kegels ist:



(a) Bestimmen Sie das Volumen und die z-Koordinate des Schwerpunktes von K. *Hinweis.* Überlegen Sie, auf welche Teilintervalle die beiden Winkel in den Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) zu beschränken sind.

(b) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment von K bezüglich der z-Achse. (*Hinweis:* $\sin^3 \vartheta = (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta$)