Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 17/18

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 18.1.2018 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 11

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$ für:

$$f(x) = x^{(x^2)}\,, \quad x > 0\,, \qquad\qquad f(x) = \arctan(\sqrt{1+x^2})\,,$$
$$f(x) = \ln(2+\cos(2x))\,, \qquad\qquad f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\,.$$

Aufgabe 2. Berechnen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^4+3x^3+2x^2-2x-4}{\sin(x^2-x)}\,,$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\sinh^2 x)}{\sqrt{x^2+x+2}}\,,$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}\,,$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{1+x^2}\,\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,.$

Aufgabe 3. Nach dem Planckschen Strahlungsgesetz ist die spektrale Strahlungsdichte eines schwarzen Körpers der Temperatur $T > 0$ bei der Wellenlänge $\lambda > 0$ gegeben durch

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}, \qquad h, c, k > 0.$$

(a) Zeigen Sie: Ist $I(\lambda)$ extremal im Punkt $\lambda_0 \in]0,\infty[$, so gilt $(5-x_0)e^{x_0} = 5$ für $x_0 := \frac{hc}{kT\lambda_0}$.

(b) Zeigen Sie: $I(\lambda)$ hat genau einen extremalen Punkt $\lambda_0 \in]0,\infty[$.