Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **WS 17/18**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Abgabe: Donnerstag, 23.11.2017 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 5

Aufgabe 1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die Dimension von $U = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ in Abhängigkeit von a.

(b) Für welche (möglicherweise unendlich viele) Werte von a und b liegt v in U? Geben Sie die Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit $v = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i u_i$ in Abhängigkeit von a, b an.

Aufgabe 2. Sei $W = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(w_1, w_2, w_3) \subset \mathbb{R}^4$ und $V = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\dim(W), \dim(V), \dim(W+V), \dim(W \cap V)$.

Aufgabe 3. Die *Tschebyscheff-Polynome* T_n und die *Hermite-Polynome* H_n sind bestimmt durch die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x & &\text{und} & T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \\ H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x & &\text{und} & H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \end{aligned}$$

für alle $n \geq 1$. Bezeichne $P_n[x]$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Polynome in x vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten.

(a) Zeigen Sie, daß für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Polynome $(T_0, \ldots, T_N)$ und die Polynome $(H_0, \ldots, H_N)$ jeweils eine Basis von $P_N[x]$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms H_3 bezüglich der Basis $(T_0, \ldots, T_3)$ von P_3 und die Koeffizienten des Polynoms T_3 bezüglich der Basis $(H_0, \ldots, H_3)$.

Aufgabe 4. (a) Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen durch (gegebenenfalls mit Rest):

$$\text{(i)} \quad \frac{2x^4 - 17x^3 + 26x^2 - 20x + 2}{2x^2 - 3x + 1}, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{\mathrm{i}z^3 - (6-2\mathrm{i})z^2 - (9+4\mathrm{i})z + (1+3\mathrm{i})}{z + 2 + \mathrm{i}}.$$

(b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\text{(i)} \quad \frac{z}{(z-\mathrm{i})(z+1)}, \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1}{x^2(1+x)^2}.$$