Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock

WS 17/18

Probeklausur zur Mathematik für Physiker I

Vorbemerkungen:

- Zur Teilnahme an einer der Klausuren am 27.1.2018 bzw. 5.4.2018 sind Anmeldungen im Kursbuchungssystem erforderlich. Letzer Termin für die Anmeldung zur 1. Klausur ist der 25.1.2018. Bitte schreiben Sie die Klausur in jenen Hörsaal, für den Sie sich angemeldet haben.
- Es wird während der Klausur überprüft, ob Ihr Name mit dem auf der Klausur angegebenen übereinstimmt. Bitte bringen Sie deshalb einen Ausweis (o.ä.) mit Lichtbild mit.
- Einziges zugelassenes Hilfsmittel ist ein selbst zusammengestelltes A4-Blatt (ein- oder zweiseitig) mit Notizen. Dieses Blatt kann handgeschrieben oder per Computer erstellt sein. Dabei ist jedoch die Schriftgröße so zu wählen, daß (abgesehen von üblichen Brillen) keine optischen Hilfsmittel wie Lupen oder Mikroskope zum Lesen erforderlich sind.
- Taschenrechner, Mobiltelephone und ähnliche Hilfsmittel bei der Klausur nicht zulässig.
- Papier (A4) bringen Sie bitte selbst mit. Jede Aufgabe sollte auf einer neuen Seite (nicht neues Blatt) begonnen werden.
- Die folgenden Aufgaben waren Klausuraufgaben im WS 2015/16.
- Alle Lösungsschritte sind nachvollziehbar zu begründen.
- Die Klausuren werden zusätzlich zu Aufgaben von ähnlicher Art auch einen theoretischen Teil beinhalten, in dem wichtige Definitionen und Sätze des Semesters abgefragt werden.
- Die Probeklausur wird am 22.1.2018 ab 18h00 im M1 vorgerechnet.
- Die Klausureinsicht ist für den 30.1. von 9h00 bis 10h00 im SR1C geplant.

Aufgabe 1. (a) Beweisen Sie: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.

Hinweis: Eine geschickte Operation angewandt auf $(1+x)^n$ führt zum Ziel.

(b) Beweisen Sie: $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}^\times$.

Aufgabe 2. Es sei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ t \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i}+t \\ 1+2\mathrm{i}t \\ -3\mathrm{i}t \end{pmatrix}, \quad w_s = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad W_t := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(v_1, v_2) .$$

(a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{C}}(W_t)$ als Funktion von $t \in \mathbb{C}$.

(b) Für $t = 1$ gibt es genau ein $s \in \mathbb{C}$, so daß $w_s \in W_1$. Bestimmen Sie diese Zahl s.

(c) Bestimmen Sie für $t = 1$ und $s \in \mathbb{C}$ aus (b) die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ mit $w_s = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Aufgabe 3. Es sei $x_n := \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1}$. Zeigen Sie:

(a) Die Folge $(\frac{x_n}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist monoton fallend.

(b) Die Folge $(\frac{x_n}{\sqrt{n+1}})_{n\in\mathbb{N}^\times}$ ist monoton wachsend.

(c) Beide Folgen in (a) und (b) konvergieren gegen den gleichen Grenzwert $a \in [\sqrt{2}, 2]$.

Aufgabe 4. a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{4n}{n} z^n$.

b) Berechnen Sie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Aufgabe 5. Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+\pi} - n}{\tan\frac{1}{n}}$ (b) $\lim_{x\nearrow 1} \frac{(\sqrt{x} - x^4)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$

Aufgabe 6. Wird in einem Kreis vom Radius R ein gleichschenkliges Dreieck mit Seitenlängen $a, b = c$ und gegenüberliegenden Winkeln $\alpha, \beta = \gamma = \frac{\pi-\alpha}{2}$ einbeschrieben, so gilt $2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Dieses Dreieck hat das Flächenträgheitsmoment $I = \frac{a^3 h}{48}$ (bei Rotation um die Symmetrieachse), wenn h die Höhe über a ist.

(a) Zeigen Sie: $h = R(1 + \cos\alpha)$.

(b) Beweisen Sie: Es gibt einen Winkel α, welcher I maximiert.

(c) Bestimmen Sie dieses maximale Flächenträgheitsmoment $I_{\max}$.