Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar
Alexander Hock **SS 18/19**

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 19.10.2018 bis 10h00 in den Briefkästen — Blatt 1

Aufgabe 1. (a) Wir betrachten die Polarkoordinatentransformation

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (r,\theta,\phi)\mapsto(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$

i) Geben Sie einen möglichst großen Bereich an, auf dem F injektiv ist.
ii) Geben Sie (explizit) eine Teilmenge $K\subseteq\mathbb{R}^3$ an mit

$$F(K)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1,\ x^2+y^2\le z^2,\ x\ge 0\right\}.$$

iii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von F und dessen Determinante $\det(DF(r,\theta,\phi))$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von G und dessen Determinante $\det(DG(r,\theta,\phi))$ mit

$$G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad (x_1,x_2,x_3)\mapsto(5x_2, 4x_1^2-2\sin(x_2x_3), x_2x_3).$$

Aufgabe 2. Seien $g_1:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3, g_2:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^3$ und $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ definiert durch

$$g_1(u,v,w):=(u+v+w, u+w, u+v),\qquad g_2(t):=(\cos^2 t,\sin^2 t, t^2),$$
$$f(x,y,z):=z(x+y).$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von g_1, g_2 und f.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen von $f\circ g_1$ und $f\circ g_2$ (ohne Kettenregel).

(c) Prüfen Sie, daß $D(f\circ g_1)(u,v,w)=(Df)(g_1(u,v,w))\circ(Dg_1)(u,v,w)$ und $D(f\circ g_2)(t)=(Df)(g_2(t))\circ(Dg_2)(t)$.

Aufgabe 3. (a) Sei $\langle -,-\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x)=\langle x,x\rangle$. Berechnen Sie für alle $x,y\in\mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $(D_yf)(x)$, folgern Sie, daß f total differenzierbar ist, und bestimmen Sie die totale Ableitung $(Df)(x)$ als lineare Abbildung. (*Hinweis:* Das Skalarprodukt ist nach Cauchy-Schwarz als Abbildung von $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ stetig.)

(b) Sei $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ eine Kurve mit konstanter Geschwindigkeit, also $\langle\gamma'(t),\gamma'(t)\rangle$ konstant. Zeigen Sie, daß dann die Beschleunigung $\gamma''(t)$ stets senkrecht zum Impulsvektor $\gamma'(t)$ steht.

Aufgabe 4. Seien $A, B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie: Schreiben wir die Funktion $t \mapsto \det(A + tB)$ als Polynom $t \mapsto c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$, so ist $c_0 = \det(A)$, $c_n = \det(B)$ und

$$c_1 = \sum_{k=1}^{n} \det(D_k),$$

wobei D_k die Matrix bezeichnet, die man aus A erhält, wenn man die k-te Spalte durch die k-te Spalte von B ersetzt. (*Hinweis:* Benutzen Sie die Multilinearität der Determinante bezüglich der Spalten. Versuchen Sie nicht unbedingt, die Lösung mit Formeln aufzuschreiben; eine saubere schriftliche Argumentation ist hier sinnvoller.)

(b) Folgern Sie, daß die Richtungsableitung $D_B \det(A)$ mit c_1 übereinstimmt.

(c) Bezeichne E_n die Einheitsmatrix und $\mathrm{Spur}(B)$ die Summe der Diagonaleinträge von B. Folgern Sie, daß $(D \det)(E_n)B = \mathrm{Spur}(B)$.