Prof. Dr. Raimar Wulkenhaar **SS 18/19**
Alexander Hock

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Physiker III

Abgabe: Freitag, 26.10.2018 bis 10h00 in den Briefkästen Blatt 2

Aufgabe 1. Die *Rotation* eines differenzierbaren Vektorfeldes $v\colon U \to \mathbb{R}^3$ auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ ist definiert als das Vektorfeld

$$\operatorname{rot} v = \big(\partial_3 v_2 - \partial_2 v_3,\ \partial_1 v_3 - \partial_3 v_1,\ \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2\big) : U \to \mathbb{R}^3.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} v$ für $v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \big(\mathrm{e}^{x_1+x_2}, \sin(x_2x_3), x_1 + x_3\big)$.

(b) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und seien $f\colon U \to \mathbb{R}$ und $u, v\colon U \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\operatorname{grad} f &= 0, & \operatorname{rot}(fu) &= f \operatorname{rot} u + (\operatorname{grad} f) \times u,\\ \operatorname{div}\operatorname{rot} u &= 0, & \operatorname{div}(u \times v) &= \langle \operatorname{rot} u, v\rangle - \langle u, \operatorname{rot} v\rangle, \end{aligned}$$

wobei $x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)^t$ für $x, y \in \mathbb{R}^3$.

(*Bemerkung:* Die Aussagen (b) sind bereits aus Abschnitt 28 des 1. Semesters bekannt oder über Differentialformen leicht zu zeigen. Hier soll zur Übung ein Beweis nur unter Verwendung der partiellen Ableitungen gegeben werden. Ein weiterer Lösungsweg basiert auf der suggestiven Schreibweise $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ als Vektor von Operatoren. Man erhält dann symbolisch $\nabla f = \operatorname{grad} f$, $\langle \nabla, f\rangle = \operatorname{div} f$, $\nabla \times v = \operatorname{rot} v$. Dann gilt zum Beispiel $\nabla \times (fu) = (\nabla f) \times u + f(\nabla \times u)$.)

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx,$$

an der Stelle $(1, 1, 0)$, indem Sie

(a) die erforderlichen partiellen Ableitungen berechnen beziehungsweise

(b) f als Polynom in den Variablen $\tilde{x} = x - 1$, $\tilde{y} = y - 1$ und $\tilde{z} = z$ umschreiben.

(*Bemerkung:* Überlegen Sie sich, daß ab einer bestimmten Ordnung sich das Taylorpolynom nicht mehr ändert, so daß die Taylorreihe in diesem Fall konvergiert)

Aufgabe 3. Der (orientierte) Flächeninhalt eines dem Einheitskreis einbeschriebenen Dreieck mit den Ecken $(-1, 0)$, $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ und $(\cos\beta, \sin\beta)$ ist gegeben durch

$$A(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \cos\alpha + 1 & \sin\alpha \\ \cos\beta + 1 & \sin\beta \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die lokalen Extrema von A in $]-\pi, \pi[\times]-\pi, \pi[$.

Aufgabe 4. Es sei $A := [1, \infty[\subseteq \mathbb{R}$, versehen mit dem Standard-Abstand $d(x, y) := |x - y|$. Ferner sei $T : A \to A$ definiert durch $T(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Zeigen Sie:

(a) $A \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.

(b) Für alle $x, y \in A$ mit $x \neq y$ gilt $|T(x) - T(y)| < |x - y|$.

(c) T ist keine Kontraktion.

(d) Sei $k \in \mathbb{N}^\times$. Für alle $1 \leq x_0 \leq k$ gilt

$$x_n \geq x_0 + \sum_{i=k}^{n-1+k} \frac{1}{i}, \qquad n \geq 1,$$

wobei $x_{n+1} = T(x_n)$. Schließen Sie: T hat keinen Fixpunkt.